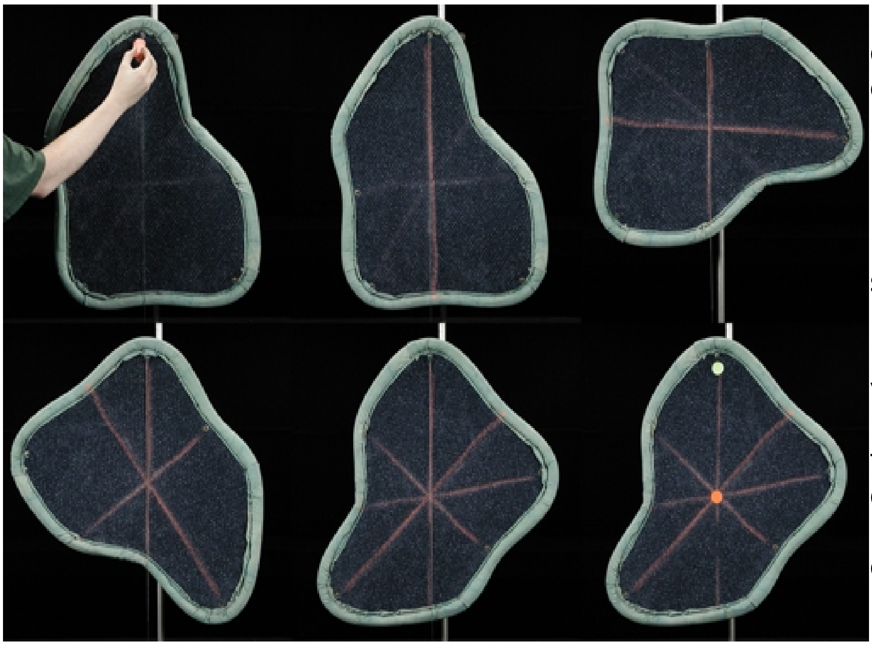
LA STATICA

LA LEZIONE

Statica delle figure piane e la leva

È pratica comune nella scuola secondaria superiore di primo e secondo grado, proporre semplici esperienze per la determinazione del baricentro di figure piane regolari e irregolari.



Nelle vicinanze del bordo della figura, realizzata con cartoncino o con una lamina metallica, sono praticati dei piccoli forellini. Usando uno di questi come punto di sospensione e un filo a piombo si traccia con una matita, o un pennarello, la verticale. Si ripete il procedimento con gli altri fori. Il punto d'intersezione delle verticali rappresenta il baricentro nel quale si considera applicata la risultante delle forze peso.

fig.1 Metodo per la determinazione del baricentro di figure piane

Un'altra esperienza di statica comune nel biennio della scuola superiore è la trattazione dell'equilibrio di una bilancia a *bracci* disuguali. Un'asta, lunga circa un metro, è libera di ruotare intorno al suo *baricentro* con un attrito molto basso. Si chiede ai ragazzi di applicare nelle due parti dell'asta *pesi* diversi a distanze diseguali in modo da mantenere l'asta orizzontale. La condizione di equilibrio è che il prodotto *peso* per *braccio* rimanga costante.

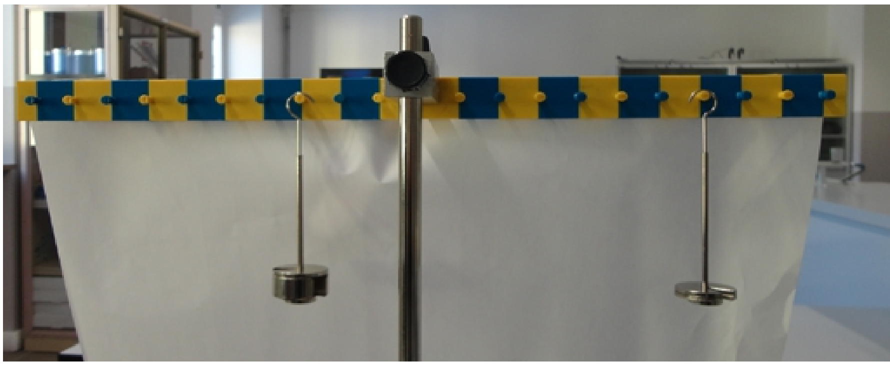


fig.2 Equilibrio di un'asta sotto l'azione di due pesi

La spiegazione dinamica della questione equivalente, una leva che gira attorno al fulcro, fu affrontata già nel terzo secolo avanti Cristo dall'autore dei Problemi meccanici. "*Il peso che è mosso sta dunque al peso che produce il movimento nella ragione inversa delle lunghezze dei bracci della leva; perché ciascun peso determinerà tanto più facilmente il movimento quanto più lontano si troverà dal punto d'appoggio.*

E la causa ne è sempre la stessa: cioè che la traiettoria che è più lontana dal centro comporta un arco maggiore." (G.Colonnetti, Statica, Enciclopedia Italiana, 1936); all'epoca il trattato citato era associato al nome di Aristotele o alla sua scuola; oggi si considera frutto della scuola peripatetica e spostato più vicino a noi di circa un secolo.

Al tentativo di spiegare il funzionamento della leva secondo un principio generale (il moto circolare) diede una risposta matematica Archimede nel suo trattato *Sui piani equiponderanti* dove dimostrava che "*le grandezze commensurabili sono in equilibrio se sospese a distanze inversamente proporzionali ai pesi*"(*E. Nenci, Dalle macchine semplici alla meccanica newtoniana, Il Contributo italiano alla storia del pensiero, 2013*).

Negli studi archimedei sulla leva e sui centri di gravità l'impostazione della statica di configurazioni piane di pesi era analoga a quella della geometria. Il complesso doveva essere ricondotto a una serie di proposizioni semplici considerate autoevidenti, secondo una struttura deduttiva. Il trattato si Archimede sull'equilibrio dei piani, se si dà per scontato che nessuna parte della fisica può essere messa in una forma assiomatica completa, è il primo tentativo, con novità matematiche importanti, di risolvere il problema della somma di forze parallele. La configurazione di pesi e il punto di equilibrio della configurazione sono tali quando sospendendo per il baricentro la figura essa rimane in equilibrio.

fig.3 *Lamina metallica in equilibrio*

Così, ritornando all'esperienza della determinazione del baricentro, si chiede agli alunni di appoggiare la figura su un asse, con il punto d'intersezione delle verticali coincidente con la punta dell'asta, in modo tale che la lamina disposta orizzontalmente sia in equilibrio.

In termini moderni la trattazione delle condizioni di equilibrio è realizzata utilizzando il concetto di reazione del *vincolo* e quella di somma di *vettori*. Sia la *risultante* di tutte le *forze* attive (il *peso* applicato nel *baricentro*) che quella delle *forze passive* vincolari (le reazioni dovute ai punti di appoggio) sono allineate lungo la verticale passante per il *centro di gravità*. Inoltre i due vettori hanno versi opposti. Una delle condizioni di equilibrio è che se tutte le forze possono essere ricondotte a una *coppia* questa deve avere *braccio* nullo. Così anche complicando l'esperienza dell'asta, vincolandola a un punto diverso dal suo baricentro (in tal caso tra le forze attive bisogna considerare il peso dell'asta applicato nel suo centro) o utilizzando più pesi, una delle condizioni di equilibrio è che il prodotto $F_i b_i$ delle forze i che fanno ruotare l'asta in un verso dovrà essere uguale alla sommatoria dei prodotti $F_j b_j$ delle forze j che tendono a far ruotare l'asta nel verso opposto.

Nel vincolo a ogni forza F_i corrisponderà una R_i opposta e il braccio della coppia sarà la distanza (per l'asta orizzontale) tra il vincolo e la forza stessa. Con riferimento alla figura 4:

$$F_1 b_1 = F_2 b_2 + F_3 b_3$$

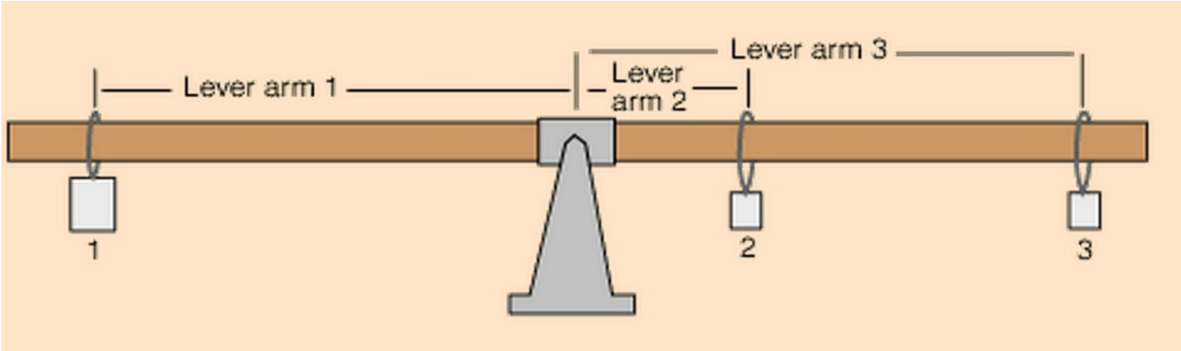


fig.4 Equilibrio di un'asta vincolata al centro sotto l'azione di più pesi

Piano inclinato e le altre macchine che suscitano meraviglia

Come spiega Elio Nenci nell'articolo: Dalle macchine semplici alla meccanica newtoniana: "*Con i Problemi meccanici (3° sec. a.C. ca.), riconosciuti oggi come opera non attribuibile ad Aristotele, ma sicuramente proveniente dalla scuola peripatetica, abbiamo il primo tentativo di ricondurre a un principio di carattere matematico unitario il funzionamento delle macchine semplici (leva, argano, sistemi di carrucole, cuneo). Punto di partenza della riflessione sulle macchine nel pensiero antico, questo testo non sembra però avere esercitato un grande influsso nel corso delle epoche successive, perlomeno fino al 16° secolo. Fu infatti in seguito al grande lavoro di recupero delle opere dell'antichità messo in opera durante il Rinascimento, che esso divenne oggetto di studio approfondito soprattutto nella penisola italiana, dove si trasformò in uno degli elementi portanti della rinascita della 'meccanica' antica.*

Risultato finale di tale processo di recupero fu la nuova sistemazione teorica della disciplina operata da Guidobaldo Dal Monte (1545-1607) nel Mechanicorum liber (1577), una sistemazione che passava attraverso uno studio approfondito dei testi di Archimede, una critica dettagliata della teoria dell'equilibrio nelle bilance proposta nella scientia de ponderibus di Giordano Nemorario (13° sec.), e infine attraverso la valorizzazione del contenuto del libro VIII delle Collezioni matematiche di Pappo di Alessandria (3° sec. d.C.), libro che ingloba alcuni lunghi frammenti della Meccanica di Erone, un'opera trasmessaci solo in arabo e recuperata soltanto alla fine del 19° secolo. In quest'ultimo testo si trova, tra l'altro, la trattazione più articolata dell'ultima macchina semplice individuata dagli antichi: la vite.

L'impostazione archimedea esemplificata nel Mechanicorum liber tendeva però a escludere dall'analisi teorica uno degli aspetti essenziali presenti nei Problemi meccanici, vale a dire la riflessione sul movimento e sulle diverse 'velocità' riscontrabili nelle singole componenti delle macchine semplici. Pur rimanendo un elemento importante per la comprensione del modo di operare di tali macchine, il moto di fatto non rappresentava più il punto di riferimento fondamentale con cui affrontare la spiegazione del loro funzionamento."

Ancor oggi i testi di fisica dedicano alle macchine semplici, che permettono, come la leva, di sollevare grandi pesi con forze relativamente modeste, un capitolo. In esso l'introduzione alla statica del punto materiale e del corpo rigido si avvale dei concetti di: forza di reazione, attrito, scomposizione di una forza, parallelogramma delle forze, momento di una forza. Gli aspetti dinamici dei movimenti delle macchine sono completamente assenti, mentre -come continua Nenci-:

"Galileo Galilei (1564-1642) e gli altri autori italiani cercheranno invece di trovare una nuova forma di collegamento tra la 'scienza del moto', allora fondata su nuove basi, e la teoria dell'equilibrio di derivazione archimedea. Vennero così a imporsi nuovi concetti, alcuni più chiaramente definiti, per es. il concetto di 'momento statico', altri

ancora non pienamente analizzati in tutte le loro implicazioni: si pensi all'idea di 'velocità virtuale', che diverrà nel Settecento uno dei principi fondamentali della meccanica. Alla fine di questo lungo processo storico lo studio del funzionamento delle macchine semplici aveva quindi di fatto perso parte della sua importanza a livello teorico, ma rimaneva comunque propedeutico a ogni ulteriore ricerca in campo meccanico. Dal punto di vista della storia della scienza e della tecnica esso resta invece ancora fondamentale per comprendere la formazione, non solo della scienza moderna, ma anche del problematico rapporto tra sapere tecnico dei 'pratici' e sapere scientifico dei filosofi naturali."

L'obiettivo di autori come Galileo e Stevin che operarono tra Cinquecento e Seicento fu quello di spiegare matematicamente le macchine che suscitavano stupore, in modo che gli apparenti paradossi che esse sollevavano non fossero più tali. Con un certo orgoglio Stevin incorniciò la soluzione pittografica al problema del piano inclinato con il motto "*la meraviglia non è più meraviglia*". Nel frontespizio dei suoi *Hypomnemata mathematica* egli raffigurò un esperimento ideale con un triangolo (con un lato disposto orizzontalmente) circondato da una collana con quattordici cerchi equidistanti. Facendo riferimento alla figura 5, quattro "perle" sono allineate sul lato inclinato AB e due sul lato BC con inclinazione maggiore e lunghezza minore del precedente. Le rimanenti otto sono sospese formando una figura simmetrica rispetto al punto D. La figura era per il matematico olandese in equilibrio perché altrimenti i cerchi si sarebbero mossi di moto perpetuo. Inoltre data l'uguaglianza delle forze in A e in C i quattro pesi lungo AB erano equivalenti ai due pesi lungo BC. Ciò lo portava a concludere che su piani inclinati della stessa altezza pesi uguali agivano in ragione inversa della lunghezza dei piani. Nell'edizione del 1605 del trattato Stevin aggiungeva un capitolo nel quale affermava: "*Ut spatium agentis ad spatium patientis, Sic potentia patientis ad potentiam agentis*". Tutti gli equilibri delle macchine dovevano soddisfare la stessa condizione: il lavoro motore era uguale al lavoro delle forze resistenti.

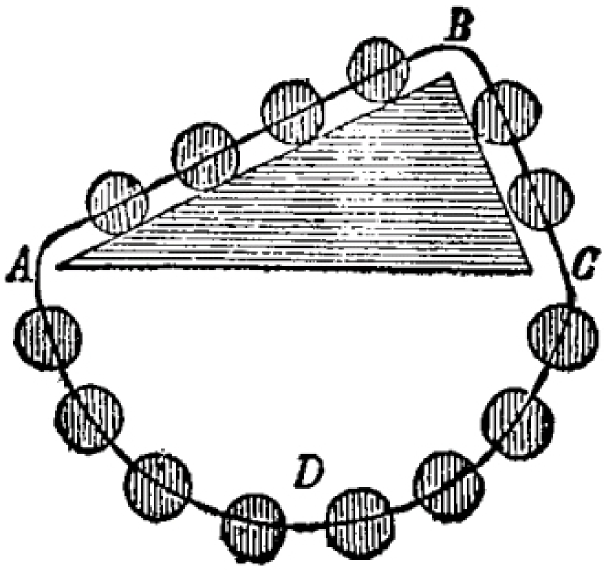
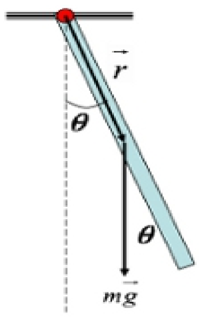


fig.5 La rappresentazione della soluzione del piano inclnato di Simon Stevin

Le macchine semplici (il piano inclinato, la leva, l'argano, i sistemi di carrucole, la vite e il cuneo) furono, come abbiamo già ricordato, dapprima riscoperte sulla base dei testi greci e successivamente interpretate, sulla base di nuovi concetti da autori come Leonardo da Vinci che introdusse l'equivalente del parallelogramma delle forze, da Galileo Galilei che insieme a Simon Stevin risolse il problema del piano inclinato, da Evangelista Torricelli che si occupò del principio di stabilità di due gravi legati tra loro, da Pierre Varignon che trattò il momento statico. La statica da un lato proseguì secondo studi volti alla tradizione matematica codificata da Archimede: ogni affermazione complessa doveva essere ricondotta a una serie di assunti semplici autoevidenti in analogia all’impostazione euclidea della geometria, tralasciando però spesso alcune ipotesi alla base dei ragionamenti dimostrativi. Così Daniel Bernoulli per spiegare le nuove proprietà delle forze dava per scontato che tutte le forze potessero essere sempre sostituite da un’unica forza risultante. D’altra parte l’assunzione di un principio fisico comune a tutti i fenomeni di equilibrio fu l’esplicito obiettivo di alcuni filosofi come René Descartes. Senza approfondire la questione qui basti ricordare che con Cartesio l’uguaglianza dei lavori già accennata e presente in moti altri autori venne legata non alle velocità virtuali, ma agli spostamenti virtuali, piccolissime variazioni rispetto alla posizione di equilibrio

Equilibrio stabile

Se si prende un’asta metallica forata, vincolata con un perno in prossimità di una sua estremità, e la si fa oscillare come un pendolo composto, aspettando un tempo sufficientemente lungo, il sistema raggiunge la posizione di equilibrio verticale.



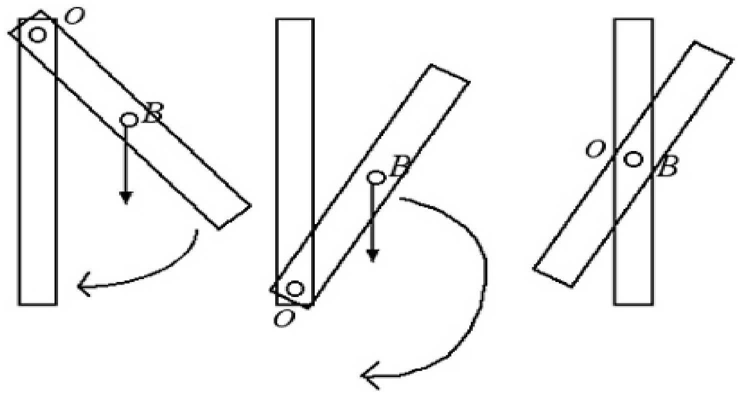


fig.6 L’asta come pendolo composto (a sinistra); fig.7 Equilibrio stabile, instabile e indifferente in un'asta infulcrata (a destra)

Cambiando la posizione del vincolo si possono distinguere tre tipi di equilibrio: stabile, instabile e indifferente. La stabilità si ha quando il centro di gravità si trova al di sotto del vincolo, come succede nei giochi di equilibrio realizzati con oggetti di uso comune. Ritornando al sistema iniziale, la giustificazione della mancanza di equilibrio dell’asta nella posizione iniziale è oggi affrontata con l’introduzione di una coppia di forze (la forza peso applicata al baricentro del corpo e la reazione del vincolo, opposta alla precedente, nel punto di sospensione). Pur essendo la somma delle due forze uguale a zero, il corpo rigido ruota a causa del momento della coppia diverso da zero. La cui intensità è definita come prodotto del modulo della forza per la distanza tra le rette di azione delle due forze (parallele e passanti per i rispettivi punti di applicazione).

Già nei pseudoaristotelici Problemi meccanici, i filosofi greci avevano considerato una trave sospesa a un filo nel centro del suo bordo superiore (il punto di sospensione si trovava sopra al baricentro). Una volta spostata l’asta, l’autore provava a spiegare perché essa tende a ritornare alla posizione iniziale. E sei secoli dopo Pappo d’Alessandria assumeva l’equilibrio indifferente come punto di partenza per definire il centro di gravità, costatando la possibilità di orientare in qualsiasi modo un oggetto, una volta fatto coincidere il centro di gravità e quello di sospensione. Solo con il trattato seicentesco, De motu gravium, di Torricelli lo studio dell’equilibrio si arricchì di nuove considerazioni. L’allievo di Galileo ammise che due gravi collegati (con una leva, una puleggia o un altro meccanismo) si comportassero come un unico corpo il cui centro di gravità poteva spostarsi spontaneamente solo quando questo tendeva verso il basso. Come accade nel gioco del doppio cono poggiato su due guide di legno inclinate e divaricate. L’oggetto disposto nella posizione più bassa delle guide “risale” i piani inclinati, ma allo stesso tempo sposta i punti di contatto da una circonferenza lontana dalle punte dei coni a una più vicina. Se si osserva la posizione del baricentro (le sezioni dei coni nei punti di contatto delle guide diventano più piccole) all'inizio e alla fine del moto si nota che quest'ultimo effettivamente si trova alla fine più in basso rispetto al piano orizzontale e non vi è nessun paradosso meccanico.

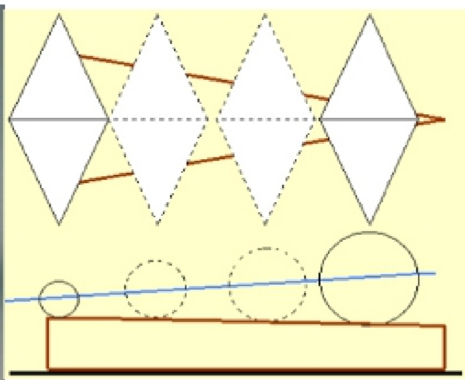


fig.8 Il doppio cono e la sua guida; fig.9 Rappresentazione dell'inclinazione della guida (in rosso) e del moto del baricentro (in blu) di un doppio cono

Solo nel Settecento principalmente con le opere di Joseph-Louis Lagrange (*Mécanique Analytique*, 1788) si affermò il principio dei lavori virtuali come fondamento della statica. In una forma moderna il principio può essere espresso nella forma: per mantenere in equilibrio un sistema meccanico inizialmente in quiete il lavoro virtuale delle forze attive applicate al sistema dev'essere nullo per gli spostamenti virtuali invertibili; negativo, o eccezionalmente nullo, per gli spostamenti virtuali non invertibili. Così la meccanica dell'equilibrio cerca di definire una funzione caratterizzata da un principio di minimo, da vincoli esterni (senza attrito o con attrito) e dagli spostamenti infinitesimi (invertibili o non invertibili). A partire dal principio è possibile dimostrare che un corpo rigido (il vincolo interno è che le diverse parti del sistema non varino le diverse distanze) per essere in equilibrio le somme delle forze e dei momenti siano uguali a zero.

Condizioni di equilibrio

Il moto di un corpo di cui si possono trascurare le deformazioni è in genere suddiviso in traslazioni dovute alla risultante delle forze esterne agenti e rotazioni associate ai momenti delle forze. Il momento **M** rispetto a un punto (polo) O di una forza F applicata nel punto P del corpo rigido è il prodotto vettoriale **OP** x **F**. La sua unità nel Sistema Internazionale è il newton metro (N m), la stessa del lavoro, dell'energia e del calore, ma per sottolineare la differenza tra la grandezza vettoriale e le grandezze scalari collegate dal primo principio della termodinamica si preferisce riferire solo a queste ultime il simbolo J (joule). L'intensità del momento può ridursi al prodotto del modulo della forza **F** per il braccio b, dove b è la distanza del polo O dalla retta d'azione della forza passante per P. La direzione di **M** è perpendicolare al piano individuato dai vettori **OP** e **F**. Per l'ultima caratteristica di **M** in genere si fa riferimento a regole mnemoniche del tipo: immagina di ruotare **OP** verso **F** (percorrendo l'angolo minore), il verso sarà dalla parte dell'osservatore che vede avvenire il movimento in senso antiorario (nel caso di figura 10 uscente dal foglio).

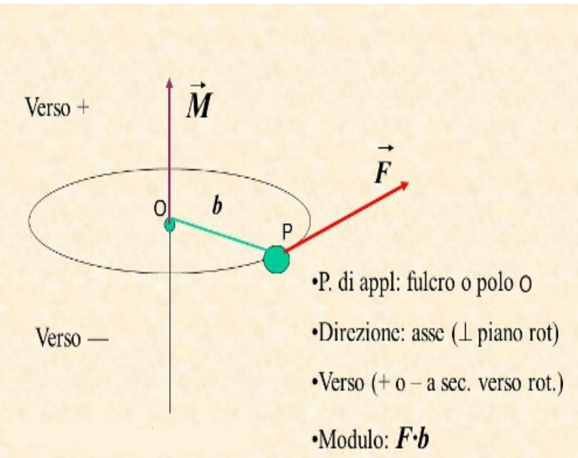


fig.10 Momento di una forza

Le condizioni di equilibrio di un corpo rigido saranno allora l'annullarsi delle cause del moto, ovvero la somma delle forze e dei momenti uguali a zero. Inoltre poiché l'equilibrio non può dipendere dal punto O che si sceglie come riferimento, la condizione: $\Sigma\ \mathbf{M} = 0$ dev'essere valida per qualsiasi polo. L'applicazione di tali equazioni a problemi concreti è difficile, mentre nel caso di un corpo rigido piano (una delle dimensioni è trascurabile rispetto alle altre due) i momenti sono perpendicolari alla figura. Ritornando al classico problema della bilancia, costituita da un'asta prismatica a sezione rettangolare con applicati vari pesi, i momenti sono tutti paralleli nell'ipotesi che essa possa essere raffigurata come un rettangolo. Le forze, indipendentemente dall'essere tutte parallele come nel caso dei soli pesi, e i bracci sono tutti nel piano del foglio e i momenti entrano o escono perpendicolari al disegno. Nella scienza delle costruzioni, la statica è inizialmente limitata a figure bidimensionali. Così i momenti sono considerati dei numeri positivi o negativi. Purtroppo la convenzione scelta è opposta a quella adottata in fisica: se la forza (la coppia) tende a far ruotare il corpo in senso orario il momento è considerato positivo, negativi i momenti dovuti a forze che provocano rotazioni antiorarie (figura 11). La regola diversa non influisce nei calcoli. L'aspetto vettoriale dei momenti è quasi completamente trascurato e la sommatoria dei momenti di un tipo dev'essere bilanciata dagli altri momenti. Nella letteratura inglese si parla di momenti torcenti τ (*torque*). Ovviamente se vi è un solo vincolo e si prende questo punto come riferimento per i momenti, le reazioni vincolari non compaiono nei calcoli. Viceversa se si ha un oggetto sospeso in più di un punto, tra le incognite del problema statico compaiono le reazioni vincolari.

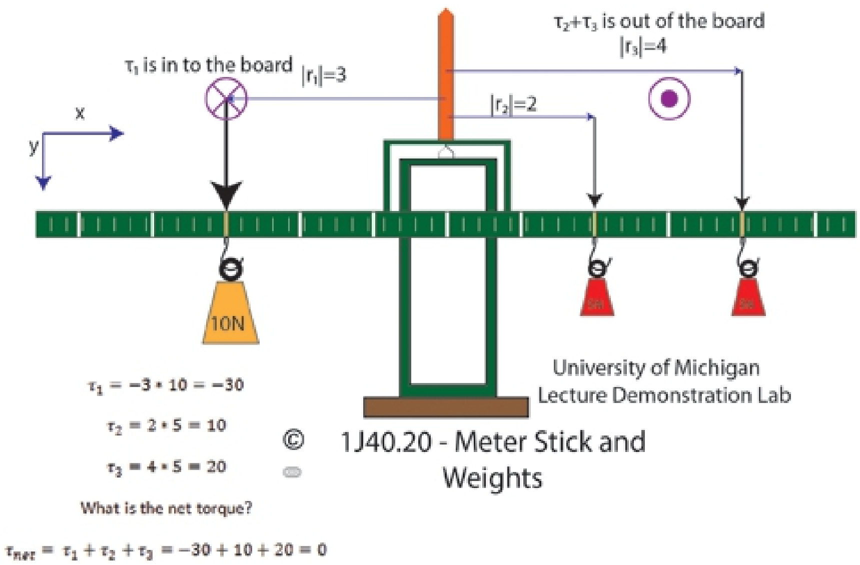


fig.11 Esempio del calcolo dei momenti