

La massa

LA LEZIONE

Il kilogrammo

L'unità di misura della massa nel Sistema Internazionale è il kilogrammo. L'unica a presentarsi formalmente come il multiplo di una unità non appartenente al SI: il grammo. Il prototipo internazionale di kilogrammo è costituito da un cilindro in lega di platino (10%) e iridio (90%), conservato in aria sotto la protezione di campane di vetro nell'Archivio metrologico di Sèvres del BIPM.

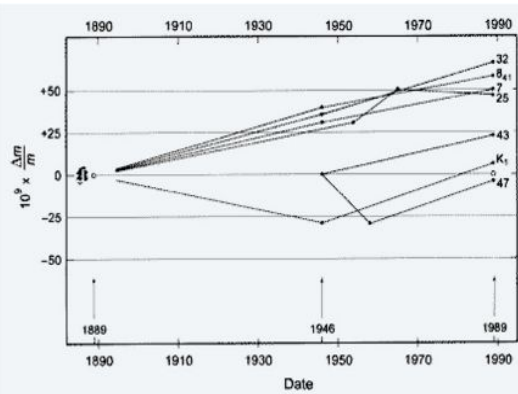
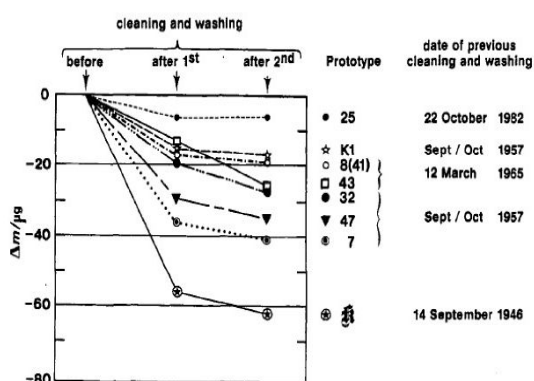


fig.1 Il prototipo internazionale di kilogrammo; fig.2 Variazioni di massa nel tempo di campioni primari di kilogrammo (contrassegnati con i numeri 32, 8(41), 7, 25, 43, K1, e 47) ottenute dal confronto con il prototipo ottocentesco

Il campione realizzato nel 1879 e adottato ufficialmente nel 1889 alla prima Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure (CGPM), è un piccolo cilindro di platino-iridio di altezza e diametro pari a 39 millimetri. I metalli che compongono la lega sono stati scelti per minimizzare le reazioni con l'aria, la bassissima tensione di vapore rende assai poco probabile la sublimazione di atomi metallici. Inoltre le tecniche metallurgiche ottocentesche garantiscono anche l'assenza di gas nel reticolo cristallino. Ciononostante il prototipo internazionale può essere soggetto a usura meccanica (si valuta che uno strato monoatomico del reticolo corrisponda a cinque microgrammi, dunque una variazione di $5 \cdot 10^{-9}$ della massa del campione) e soprattutto a contaminazione della superficie. Le campagne (l'ultima delle quali si è svolta nel 1992) per il controllo del prototipo con le sei copie ufficiali (sempre custodite a Sèvres) e i novantotto campioni primari, ognuno contrassegnato dal numero progressivo di realizzazione, conservati negli Istituti metrologici mondiali, hanno evidenziato un tendenziale aumento progressivo di massa dei campioni.



-60 μg after cleaning and washing

La reversibilità del processo ha portato a individuare delle tecniche per eliminare la variazione di Δm , valutabile nell'ordine di $1 \mu\text{g}/\text{anno}$ che fanno parte delle attuali norme per la pulizia dei campioni (*Metrologia 1991, volume 31 pp. 317-336*).

fig.3 Variazione di massa, dopo il lavaggio e la pulizia, dei campioni di kilogrammo

Il limite della scelta del prototipo come campione è che la sua massa, ipotizzata come costante, non sia più stabile delle copie. Tuttavia le deviazioni massime di $6 \cdot 10^{-8}$ in un periodo di 100 anni costituiscono la ragione principale per la resistenza di questo 'fossile' della metrologia tra le unità di misura del Sistema Internazionale.

I passaggi necessari per la sua sostituzione sono stati però tracciati nella *Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure* del 2011. La nuova definizione di kilogrammo non parla di nessun manufatto, ma impone un valore esatto alla costante di Planck. La necessità di indicare questo numero con nove cifre significative e la scelta di campioni primari e secondari ritarda la nuova adozione dell'unità di massa. Probabilmente il definitivo abbandono del prototipo avverrà solo alla Conferenza del 2018.

L'evoluzione della misura di precisione della costante di Planck

È possibile seguire lo sviluppo delle misure della costante h con una preparazione minima di teoria degli errori. La banca dati delle costanti fondamentali aggiorna periodicamente le misure (1986, 1998, 2002, 2006, 2010) ed è visibile a partire dalla [pagina web](#).

La figura 4 riassume i valori di h alla fine degli anni Novanta, in circa venti anni di misurazioni.

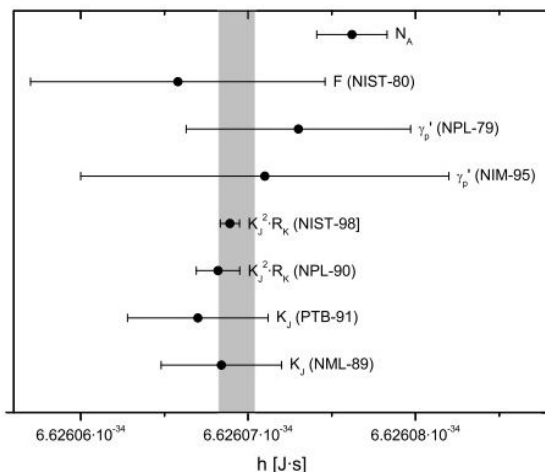


fig.4 Misure della costante di Planck con diversi metodi effettuate tra il 1979 e il 1998. I valori in grigio sono i valori proposti per h nel 2002 dal COmmittee on DATA for science and technology (ente internazionale preposto alla revisione delle costanti fondamentali)

Le sigle sono l'acronimo degli Istituti di metrologia impegnati: lo statunitense *National Institute of Standards and Technology*, il cinese *National Institute of Metrology*, l'inglese *National Physical Laboratory* e il tedesco *Physikalisch-Technische Bundesanstalt*; i numeri rappresentano l'anno di pubblicazione delle misure. I primi simboli indicano i metodi utilizzati e generalmente fanno riferimento ad altre costanti: N_A , numero di Avogadro; $K_J = 2e/h$, costante di Josephson; $R_K = h/e^2$, costante di von Klitzing.

Come si vede, la striscia grigia, che rappresenta il valore accettato all'epoca per la costante di Planck e la sua incertezza, ha un consistente tratto in comune con tutti gli intervalli di misura se si esclude il primo segmento legato alla costante di Avogadro. Il valore indicato come CODATA 2002 è il seguente:

$$h = (6,6260689 \pm 0,0000053) \cdot 10^{-34} \text{ J s, riportato anche nella forma contratta: } h = 6,6260689(53) \cdot 10^{-34} \text{ J s.}$$

L'incertezza relativa della misura (il rapporto tra l'errore e la misura) era allora

$8,1 \cdot 10^{-7}$. Il prodotto $K_j^2 R_k = 4/h$, rimanda a due costanti misurabili in fenomeni quantistici di grandezze elettriche alle basse temperature. La prima associata all'effetto Josephson che permette di definire un potenziale di riferimento (vedi la lezione d'autore sul [potenziale elettrico](#)), la seconda all'effetto von Klitzing che fissa una resistenza di riferimento. Poiché misure elettriche di precisione hanno definito nel 1990 i valori delle due costanti nel seguente modo: $K_{j-90} = 483.597,9 \cdot 10^9 \text{ Hz V}^{-1}$ (con un'incertezza relativa di $2 \cdot 10^{-7}$) e $R_{k-90} = 25.812,807 \text{ } \Omega$ (con un'incertezza relativa di 10^{-7}) è facile calcolare la costante di Planck

$$h_{90} = 4/K_{j-90}^2 R_{k-90} = 6,6260689 \cdot 10^{-34} \text{ J s,}$$

con un'incertezza relativa che si può determinare con la propagazione degli errori pari a $5 \cdot 10^{-7}$. I calcoli evidenziano la compatibilità con i dati espressi in precedenza.

Nella metrologia pratica sono dunque, di fatto, già definiti i valori della costante di Planck h e della carica elementare e , ma non con la precisione necessaria per farle diventare il fondamento del nuovo Sistema Internazionale delle unità di misura.

Nuove bilance di Watt e metodi per la determinazione del numero di atomi presenti in un perfetto reticolo cristallino hanno permesso negli ultimi anni di migliorare la misura di h di un fattore dieci. Nella figura 5 sono riportate le misure utilizzate dal CODATA 2010 per scrivere:

$$h = (6,62606957 \pm 0,00000029) \cdot 10^{-34} \text{ J s.}$$

Sull'asse verticale sono riportati i valori adimensionali $h/h_{90} - 1$ che danno la deviazione di h rispetto al valore delle costanti quantistiche del 1990 o, il che è lo stesso, del CODATA 2002. Il valore di riferimento (la linea rossa) non attraversa la maggior parte dei segmenti che rappresentano le misure con gli errori. I laboratori impegnati sono gli stessi della figura precedente con l'aggiunta dell'Istituto federale svizzero di metrologia METAS e il Consorzio del progetto Avogadro di cui parleremo nel prossimo paragrafo.

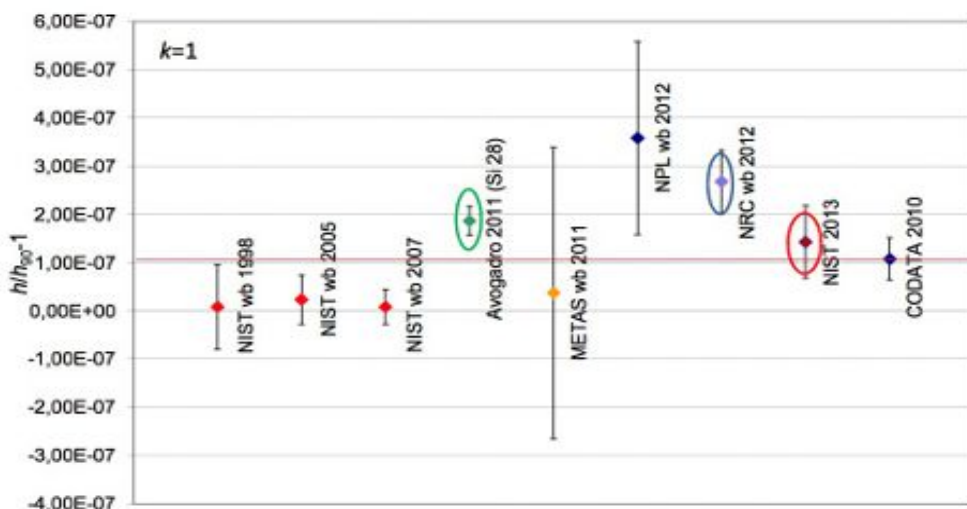


Fig.5 Misure della costante di Planck CODATA 2010 e altre misure recenti

Una situazione simile, analizzata secondo i rigidi criteri della teoria degli errori insegnata nelle scuole superiori, porterebbe a concludere che le misure non sono compatibili o che gli istituti abbiano sottostimato le incertezze. Invece il gruppo che ha come compito l'aggiornamento periodico delle costanti, fissa h uguale a: $6,62606957(29) \times 10^{-34} \text{ J s}$, con un'incertezza relativa di $4,4 \times 10^{-8}$.

Planck constant	
h	
Value	$6.626\ 069\ 57 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Standard uncertainty	$0.000\ 000\ 29 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Relative standard uncertainty	4.4×10^{-8}
Concise form	$6.626\ 069\ 57(29) \times 10^{-34} \text{ J s}$

fig.6 Il valore della costante di Planck dalla pagina web del NIST (National Institute of Standards and Technology) Reference Constants, Units, and

on
Uncertainty

La situazione odierna è per certi versi migliorata. La figura 7 si limita alle misure degli ultimi quattro anni. L'incertezza assoluta è andata rapidamente diminuendo. Le ultime due misure, con bilance di Watt, dovute al gruppo coordinato da Stephan Schlamminger al NIST e da metrologi del canadese *National Research Council*, sono rispettivamente: NIST $h=6,62606979(30) \times 10^{-34} \text{ J s}$, con un errore relativo di $4,5 \times 10^{-8}$; NRC $h=6,62607034(12) \times 10^{-34} \text{ J s}$, con un errore relativo di $1,8 \times 10^{-8}$.

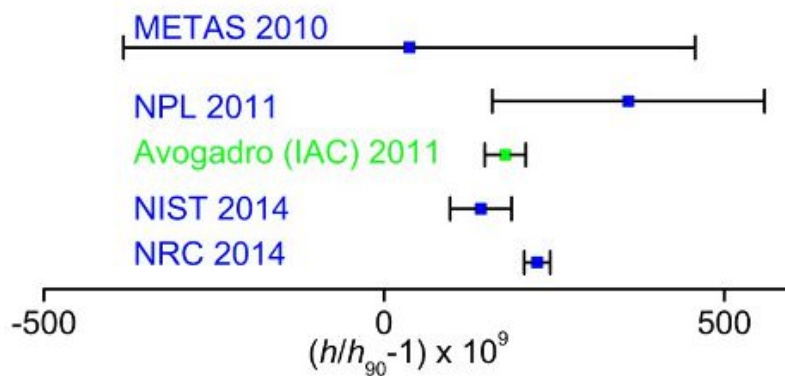


fig.7 I più recenti risultati sulla misura della costante di Planck

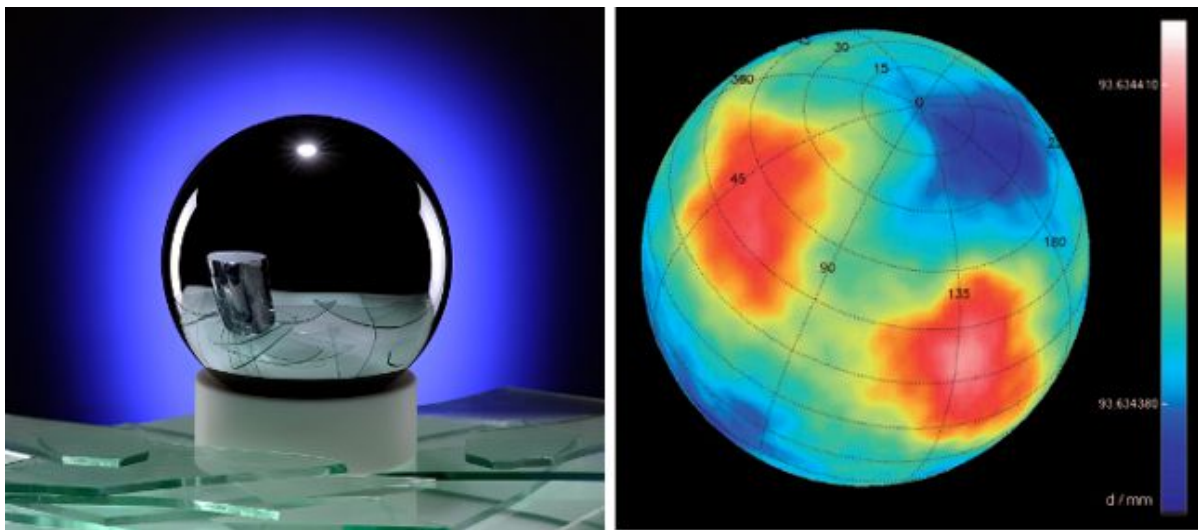
La misura media della costante di Planck si va spostando progressivamente verso valori più elevati prossimi a $h=6,62607006 \times 10^{-34} \text{ J s}$. L'errore relativo di una misura è sceso sotto la soglia 2×10^{-8} , condizione necessaria per definire il nuovo kilogrammo secondo il 14° CCM (*Consultative Committee for Mass and related quantities*) 2013. Esistono tre misure con incertezza minore di 5×10^{-8} (un'altra delle condizioni necessarie per definire in modo esatto h), manca però una compatibilità forte tra le misure dovute al Progetto Avogadro e quelle delle diverse bilance di Watt. In altre parole le proiezioni degli ultimi tre segmenti della figura 7 sulla scala comune non presentano consistenti parti comuni.

Il progetto Avogadro

Prima della scelta della costante h per definire il nuovo kilogrammo, la costante di Avogadro, una sorta di ponte tra mondo macroscopico e microscopico, ha rappresentato un'alternativa possibile.

I progressi per la selezione della purezza di un materiale e per il conteggio del numero di atomi che lo compongono hanno portato otto Istituti metrologici (il tedesco PTB, il giapponese NMIJ, l'australiano NMI, lo svizzero METAS, lo statunitense NIST, l'italiano INRiM, il francese BIPM e il belga IRMM) a intraprendere il costoso progetto *International Avogadro Coordination*. Il consorzio, dal 2001 ha realizzato cristalli puri di silicio 28.

Il silicio naturale ha da tre isotopi stabili di massa atomica: 28, 29 e 30. Attraverso la centrifugazione di un composto contenente silicio è possibile separare l'isotopo più leggero dagli altri. È stato creato un lingotto di silicio puro con una concentrazione del 99,99% di silicio 28. Il manufatto cilindrico è stato tagliato ed esaminato con tecniche spettroscopiche per misurare la massa molare. Attraverso i raggi X si è determinata la distanza dei piani atomici del cristallo e le dimensioni della cella unitaria. Il cilindro è stato infine lavorato per formare una sfera perfetta (le variazioni del raggio sono inferiori ai sessanta miliardesimi di metro) di diametro 93,6 mm e di massa unitaria (equivalente a quella di un campione di kilogrammo). Con tecniche di interferometria ottica sviluppate nell'*Australian Centre for Precision Optics* il volume della sfera è stato determinato. Il confronto con "il volume" occupato dalla cella unitaria ha infine permesso di contare il numero di atomi in una mole: il numero di Avogadro.



[fig.8](#) La sfera di silicio ad alta purezza di 1 kilogrammo; [fig.9](#) Il controllo topografico della sfera di silicio, la superficie in falsi colori evidenzia differenze rispetto al diametro ideale costante. I numeri rappresentano coordinate angolari. La differenza maggiore sul raggio della sfera ideale è di poche decine di nanometri

Inizialmente il progetto contava di definire il kilogrammo, riconducendolo, attraverso la costante di Avogadro, intuitivamente alla massa di un singolo atomo di silicio e puntava a sostituire il cilindro campione con la sfera perfetta; ora invece la determinazione di N_A , grazie alla sfera pura di silicio, fa parte integrante delle misure di h (il prodotto delle due costanti è indicato come costante molare di Planck: $N_A h$).

Una schematizzazione del metodo con bilance di Watt

Il metodo principale per arrivare al valore di h è legato all'impiego di bilance di Watt.

Semplificando al massimo il loro funzionamento si può distinguere una prima misura statica nella quale un peso mg è bilanciato dalla forza elettrodinamica $F=B i l$ esercitata da una bobina immersa in un campo magnetico. A cui segue una seconda fase in cui la bobina si muove con velocità v e genera, per induzione, una differenza di potenziale ΔV . L'idea principale è quella di uguagliare la potenza elettrica (misurata in watt): $\Delta V i$ all'equivalente meccanico: $m g v$. In prospettiva il metodo dovrebbe essere sostituito da un altro in cui al posto delle potenze si utilizzano le energie (bilance di Joule). I valori delle grandezze elettriche sono riconducibili utilizzando superconduttori agli effetti quantistici di Hall e Josephson.

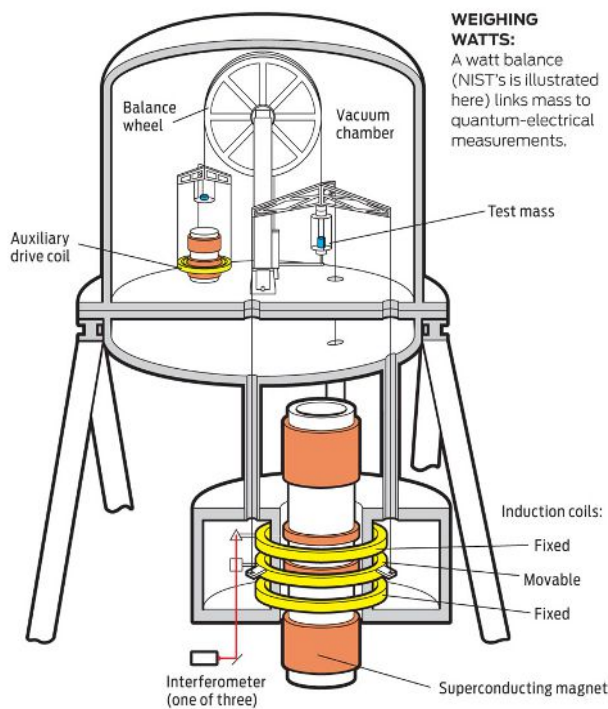


fig.10 Rappresentazione schematica della bilancia di Watt del NIST

Il movimento della bilancia è controllato da un interferometro laser. La misura dell'accelerazione di gravità è realizzata con un gravimetro. Infine ci si avvale della massa di un campione primario. Poiché, come abbiamo ricordato in precedenza, i due fenomeni quantistici portano al calcolo di $K_j=2e/h$, costante di Josephson;

$R_k = h/e^2$, costante di von Klitzing, la misura è caratterizzata dal prodotto:
 $K_j^2 R_k = 4/h$.

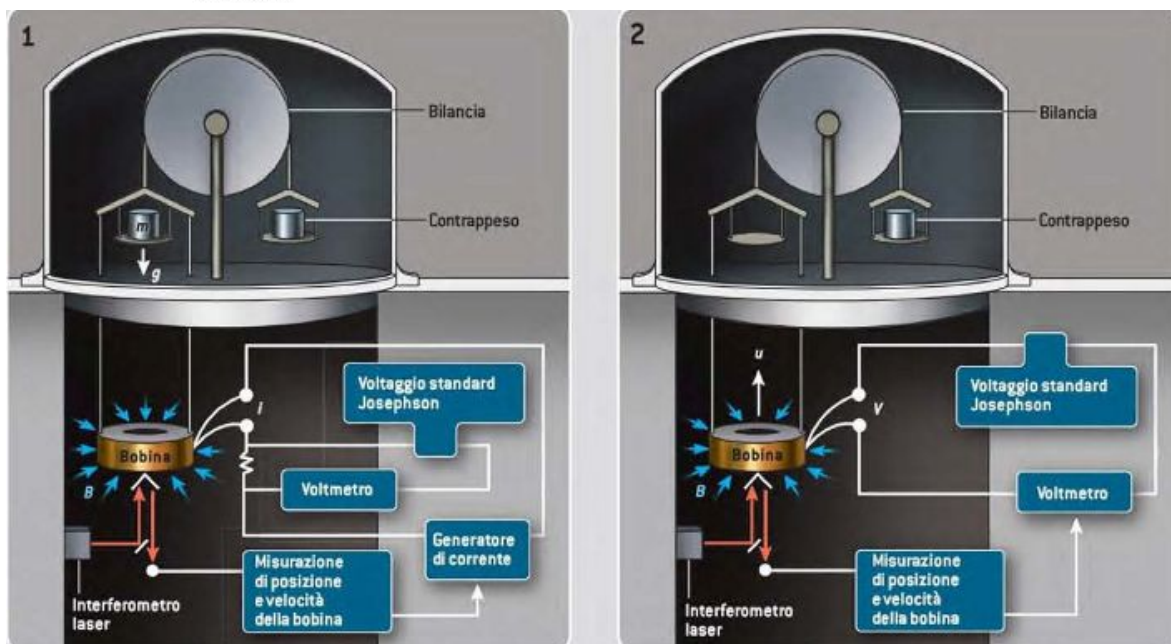


fig.11 Schema del funzionamento di una bilancia di Watt

Alla fine di questo lungo e faticoso cammino, che punta a fissare il valore esatto di h , le masse del prototipo del kilogrammo e delle sue copie varranno ancora 1 kilogrammo, ma con un'incertezza valutabile sperimentalmente. Mentre la costante di Planck per definizione avrà un valore esatto, come succede adesso per la velocità della luce nel vuoto.

Rimarrà al BIPM e agli Istituti metrologici il compito di sviluppare standard condivisi per disseminare i campioni "elettrici" primari e secondari collegati alla misura ridefinita.