

LA LEZIONE

La costante gravitazionale

Dalla densità della Terra a 'G grande'

Nel 1891 [Henri Poynting](#), professore di fisica alla *Mason Science College*, introduceva la misura in laboratorio con una bilancia della densità media della Terra e della costante di gravitazione universale, utilizzando per l'espressione della [forza gravitazionale](#) una forma molto vicina a quella odierna. Seguiamo le sue parole.

"L'oggetto dell'esperimento [...] può essere considerato la determinazione dell'attrazione di una massa M da parte di una seconda massa nota M' , posta a una distanza dalla prima. La legge di gravitazione universale afferma che, nel caso in cui le masse siano sfere con centri distanti d , la forza di attrazione è: GMM'/d^2 ; G è una costante – la costante di gravitazione- uguale per tutte le masse. Osservazioni astronomiche giustificano pienamente la legge precedente. Esse non danno, comunque il valore di G , ma solo quello del prodotto GM per i vari elementi del sistema solare."

Il brano, non solo indica la costante di gravitazione, ma impiega la lettera G conosciuta da un qualsiasi studente liceale. Vent'anni prima, nel 1873, due fisici francesi, Marie Alfred Cornu e Jean-Baptistin Baille, considerando un corpo in prossimità della superficie terrestre (massa M e raggio R), pubblicavano l'espressione della forza di gravitazione nella forma:

$$f m M / R^2$$

con la lettera f minuscola come costante di gravitazione. La densità del pianeta era calcolata dai due autori approssimando la Terra a una sfera di densità uniforme Δ . Uguagliando la forza gravitazionale al peso mg (con g accelerazione di gravità) arrivavano a:

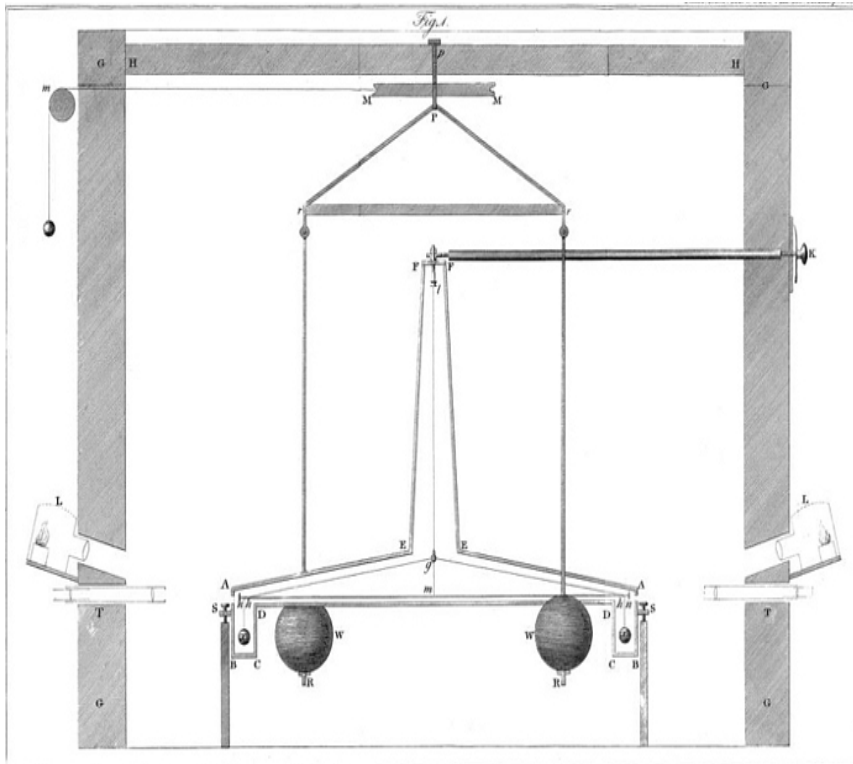
$$\Delta = 3g / 4\pi R f.$$

La densità media della Terra era quindi funzione del raggio terrestre, dell'accelerazione di gravità e di quella che noi oggi chiamiamo *costante di gravitazione universale*. Basandosi su questa espressione i testi moderni parlano della misura di [Cavendish](#) della costante di gravitazione.

Eppure nei lavori sulla densità terrestre fino a oltre la metà dell'Ottocento non si parlava esplicitamente della costante e sicuramente Henry Cavendish nel Settecento non misurò mai G , ma solo Δ .

Procediamo però adesso con ordine. Il primo passo verso la verifica sulla Terra della forza di Newton può essere considerato l'esperimento dell'astronomo [Nevil Maskelyne](#) del 1775 con il filo a piombo e il pendolo influenzati dal massiccio dello Schiehallion in Scozia.

Henry Cavendish fu l'ispiratore della valutazione della densità terrestre di Maskelyne e soli molti anni dopo, perfezionando una grande bilancia di torsione di John Michell, portò la misura della forza di gravitazione all'interno di un laboratorio. Nel 1797 lo studio della posizione di equilibrio e del periodo caratteristico di due sferette unite tra di loro e sospese a un filo, interagenti gravitazionalmente con due masse più grandi, permetteva allo scienziato Cavendish di scrivere per la densità della Terra un valore prossimo a 5,4 (posta la massa volumica dell'acqua uguale a 1).



Per la prima volta veniva provato che a piccole distanze due masse si attraevano come succedeva tra pianeti e Sole nella meccanica celeste. Facendo riferimento all'apparato sperimentale, protetto da una teca in legno, disegnato dall'autore nel 1798, gli effetti dell'interazione erano osservati dall'esterno attraverso due telescopi illuminati da piccole lampade.

fig.1 Illustrazione dell'apparato di Cavendish

Due sferette h di diametro prossimo a 5 centimetri (tutte le misure originali erano indicate in pollici e piedi) erano unite da un braccio triangolare e sospese attraverso un filo lungo circa un metro. L'attrazione dovuta ai pesi W era sufficiente per torcere il filo di sospensione e mettere la coppia di sferette in oscillazione. Il braccio lungo sei piedi (circa 1,83 metri) era realizzato con fili metallici, tra i quali l'argento. Anche i pesi W potevano essere disposti nelle vicinanze dell'apparato mobile in diverse posizioni. Dapprima secondo il tratto continuo della figura 2 e poi nella posizione simmetrica tratteggiata sempre nella stessa immagine. In questo modo nelle due situazioni sperimentali le forze gravitazionali avevano ugual modulo e verso opposto.

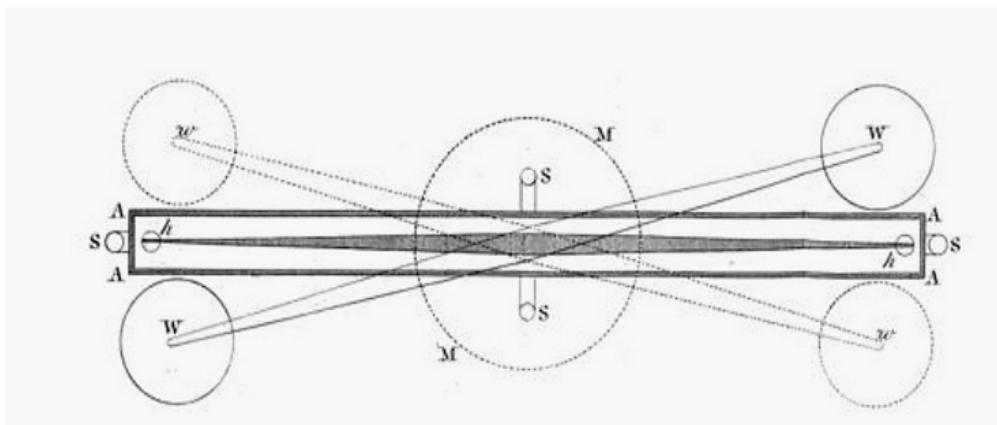


fig.2 Le due posizioni simmetriche (delle masse maggiori) utilizzate da Cavendish nelle sue esperienze

L'esperienza consisteva quindi nell'applicare una coppia di forze e osservare le oscillazioni smorzate dell'apparato mobile. Le misure di Cavendish erano distinte con i simboli ' m . to +' (da meno a più) oppure '+ to m '. (da più a meno) per contrassegnare le due diverse condizioni iniziali dei pesi W .

Le valutazioni dell'angolo di torsione in movimento (utilizzando i valori estremi delle oscillazioni) e di un tempo caratteristico delle vibrazioni furono realizzate da

Cavendish in una lunga serie di prove sperimentali. L'autore per arrivare alla forza agente paragonò il moto del sistema mobile a quello di un pendolo. La distanza caratteristica dal centro del moto al baricentro di una piccola sferetta h era allora divisa per la lunghezza di un pendolo avente lo stesso numero di vibrazioni delle masse oscillanti del suo apparato.

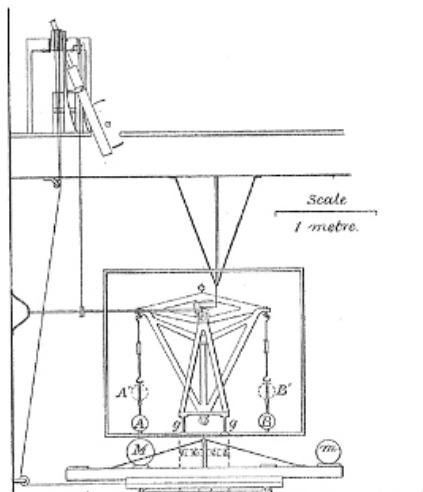
The following Table contains the Result of the Experiments.

Exper.	Mot. weight	Mot. arm	Do. corr.	Time vib.	Do. corr.	Density.
1	m. to +	14,32	13,42	" "	-	5,5
	+ to m.	14,1	13,17	14,55	-	5,61
2	m. to +	15,87	14,69	-	-	4,88
	+ to m.	15,45	14,14	14,42	-	5,07
3	+ to m.	15,22	13,56	14,39	-	5,26
	m. to +	14,5	13,28	14,54	-	5,55
4	m. to +	3,1	2,95	-	6,54	5,36
	+ to -	6,18	-	7,1	-	5,29
5	- to +	5,92	-	7,3	-	5,58
	+ to -	5,9	-	7,5	-	5,65
6	- to +	5,98	-	7,5	-	5,57
	m. to -	3,03	2,9	-	-	5,53
7	- to +	5,9	5,71	-	-	5,62
	m. to -	3,15	3,03	7,4 by mean.	6,57	5,29
- to +	6,1	5,9	5,44			
8	m. to -	3,13	3,00	-	-	5,34
	- to +	5,72	5,54	-	-	5,79
9	+ to -	6,32	-	6,58	-	5,1
10	+ to -	6,15	-	6,59	-	5,27
11	+ to -	6,07	-	7,1	-	5,39
12	- to +	6,09	-	7,3	-	5,42
13	- to +	6,12	-	7,6	-	5,47
	+ to -	5,97	-	7,7	-	5,63
14	- to +	6,27	-	7,6	-	5,34
	+ to -	6,13	-	7,6	-	5,46
15	- to +	6,34	-	7,7	-	5,3
16	- to +	6,1	-	7,16	-	5,75
17	- to +	5,78	-	7,2	-	5,68
	+ to -	5,64	-	7,3	-	5,85

Infine utilizzando tutta una serie di proporzioni era possibile ottenere la densità media della Terra con una procedura ben diversa da quella normalmente presentata nei manuali (basata sull'uguaglianza dei momenti delle forze e sull'espressione della forza gravitazionale in cui compare G). Cavendish non era interessato alla misura della costante di gravitazione, né tantomeno scrisse l'espressione della forza nella forma esplicita nella seconda metà dell'Ottocento. I suoi risultati furono riassunti in una tabella con l'ultima colonna dedicata alla densità della Terra.

fig.3 Le misure ottenute da Cavendish relative alla densità della Terra

Nel secolo successivo si assistette allo spostamento progressivo dell'interesse dalle misure sperimentali finalizzate alla densità media terrestre verso la determinazione della costante di attrazione di Newton. Gli apparati utilizzati furono principalmente dei perfezionamenti della bilancia di torsione, ma anche pendoli e semplici bilance ebbero una loro importanza. Poynting nella memoria del 1891, che gli permise di vincere due anni dopo il premio Adams dell'Università di Cambridge, riassume le ricerche sulla densità e presentava una nuova misura di G .



Approximate Date.	Experimenter.	Method.	Result.
1737-40	Bouguer... ..	Plumb-line and Pendulum	Inconclusive
1774-76	Maskelyne and Hutton	Plumb-line	4.5 to 5
1855	James and Clarke... ..	"	5.316
1821	Carlini	Mountain Pendulum ...	4.39 to 4.95
1880	Mendenhall	"	5.77
1854	Airy	Mine Pendulum	6.565
1883	von Sterneck... ..	"	5.77
1885	von Sterneck... ..	"	about 7
1797-8	Cavendish	Torsion Balance	5.448
1837	Reich	"	5.49
1840-1	Baily	"	5.674
1852	Reich	"	5.583
1870-	Cornu and Baille	"	5.56 - 5.50
1889	Boys	"	in progress
1879-80	von Jolly	Common Balance	5.692
1878-90	Poynting	"	5.493
1884-	König, Richarz and Krigar Menzel	"	in progress
1886-8	Ullsing	Pendulum Balance	5.579
1889	Laska	"	in progress

fig.4 La bilancia semplice di Poynting per la misura di G; fig.5 Tabella di Poynting sulle misure della densità della Terra realizzate da diversi sperimentatori con l'indicazione dell'apparato di misura

Alla fine del secolo nessuna ricerca ormai separava Δ da G. I principali risultati per la costante di gravitazione sono riportati nel lavoro: S. Ducheyne, *Testing Universal Gravitation in the Laboratory, or the Significance of Research on the mean Density of the Earth and Big G, 1798-1898: Changing Pursuits and long-term methodological-experimental Continuity, 2009*. Qui essi sono trasformati nelle unità del Sistema Internazionale.

Autore	Anno	Valore di G nelle unità SI ($m^3Kg^{-1}s^{-2}$)
Poynting	1892	$6,6984 \cdot 10^{-11}$
Boys	1895	$6,6579 \cdot 10^{-11}$
Braun	1896	$(6,65816 \pm 0,00168) \cdot 10^{-11}$
Richarz, Krigar Menzel	1898	$(6,685 \pm 0,0011) \cdot 10^{-11}$

Il valore attuale dei manuali ($6,67 \cdot 10^{-11} m^3Kg^{-1}s^{-2}$) è molto vicino alla media approssimata alla terza cifra decimale delle misure di fine secolo.

Paradossalmente altri 120 anni di perfezionamenti tecnici alle bilance di torsione non hanno portato oggi nella misura della grande G a miglioramenti paragonabili a quelli delle altre costanti fisiche.

La bilancia di torsione rivista in chiave moderna

Il metodo ideato da Cavendish alla fine del Settecento per pesare in laboratorio la Terra ha subito in oltre due secoli moltissime modifiche e perfezionamenti. Negli ultimi quindici anni, L'Ufficio Internazionale dei pesi e delle misure (BIPM, *Bureau international des poids et mesures*), al fine di determinare la costante di gravitazione

universale, ha realizzato due diversi apparati sperimentali fondati sull'utilizzo di nuove bilance di torsione.

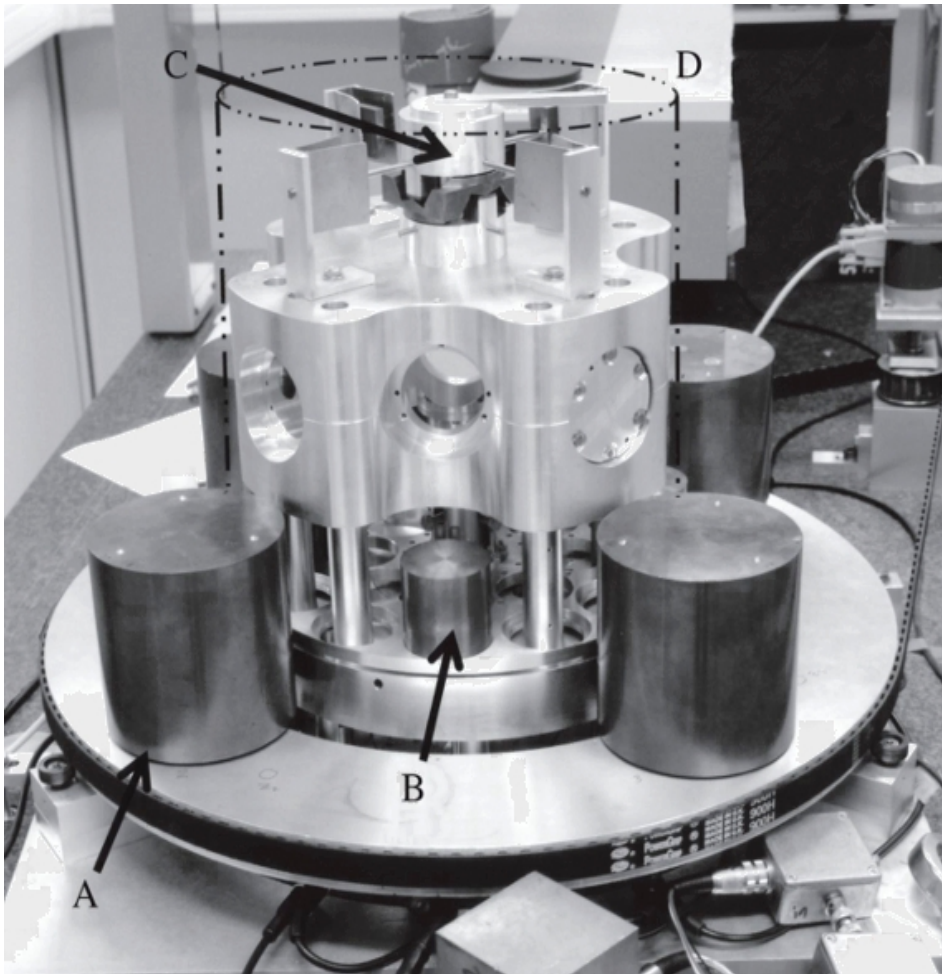


fig.6 L'ultima bilancia di torsione del BIPB. Con A e B sono indicate due delle masse interagenti gravitazionalmente

L'errore relativo indicato nel 2013-14 dai metrologi del BIPM è di 10 parti per milione, considerato dagli esperti del settore il limite inferiore per misure di questo tipo.

Le attuali bilance di torsione, schematizzando, impiegano quattro tecniche principali per la valutazione della forza gravitazionale.

Il metodo alla Cavendish è realizzato con il confronto di una doppia situazione simmetrica (ottenuta ruotando le due masse più grandi) e la misura dell'angolo medio di torsione e del periodo caratteristico.

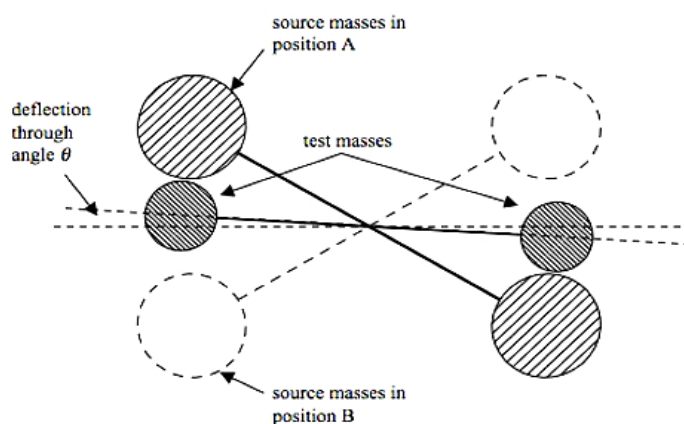


fig.7 Metodo di misura con bilancia di torsione alla Cavendish

Un'alternativa alla situazione simmetrica è stata sviluppata nel Novecento in moltissimi laboratori e prosegue tutt'oggi.

Invece di considerare lo spostamento medio dell'angolo dalla posizione di equilibrio iniziale a causa di forze gravitazionali di uguale intensità si preferisce utilizzare due posizioni estreme con masse vicine e lontane, studiando la frequenza caratteristica delle oscillazioni della bilancia di torsione. Il metodo è detto in inglese *time of swing*.

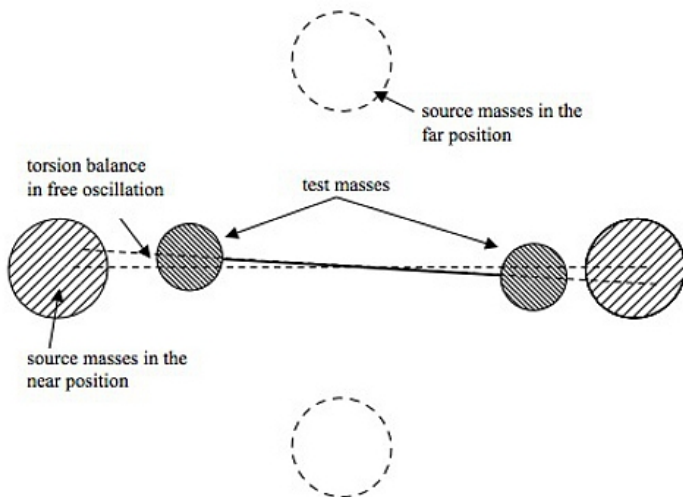


fig.8 Le configurazioni del metodo più diffuso attualmente per la misura di G con la bilancia di torsione (indicato in inglese come time of swing)

Infine i metodi dinamici sono stati affiancati da sistemi che producono una forza di reazione capace di bilanciare quella gravitazionale con una controreazione di tipo elettrostatico o meccanico (sistema di accelerazioni controllabili).

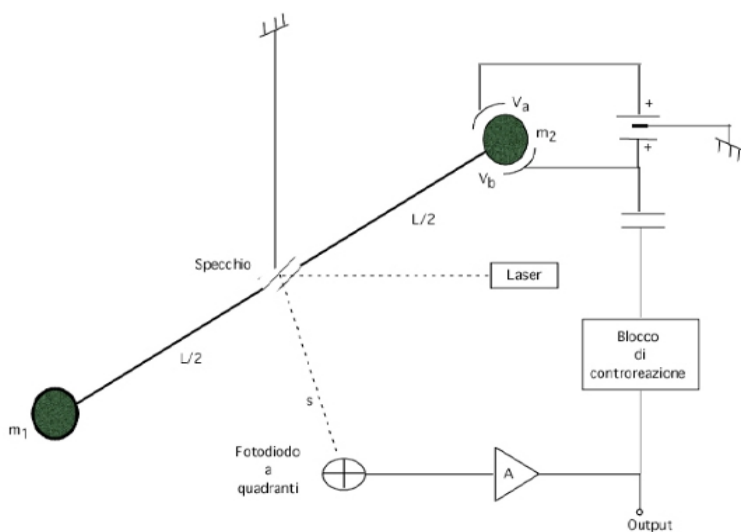


fig.9 Schema del metodo con retroazione elettrostatica

Ritornando al caso classico, spesso presentato nelle aule universitarie, l'apparato mobile sospeso a un filo è soggetto a una coppia di forze di uguale intensità:

$F = Gmm'/r^2$. Indicando con d la distanza tra i centri delle due masse oscillanti e con r la distanza tra il centro della massa m e quello della massa grande m' , il momento complessivo della coppia di forze ha intensità: $Fd = Gmm'd/r^2$.

Il movimento del sistema può essere seguito con la riflessione di un raggio laser che termina su una scala graduata (o meglio ancora su un sistema automatico costituito da fotodiodi, vista la durata delle oscillazioni della bilancia).

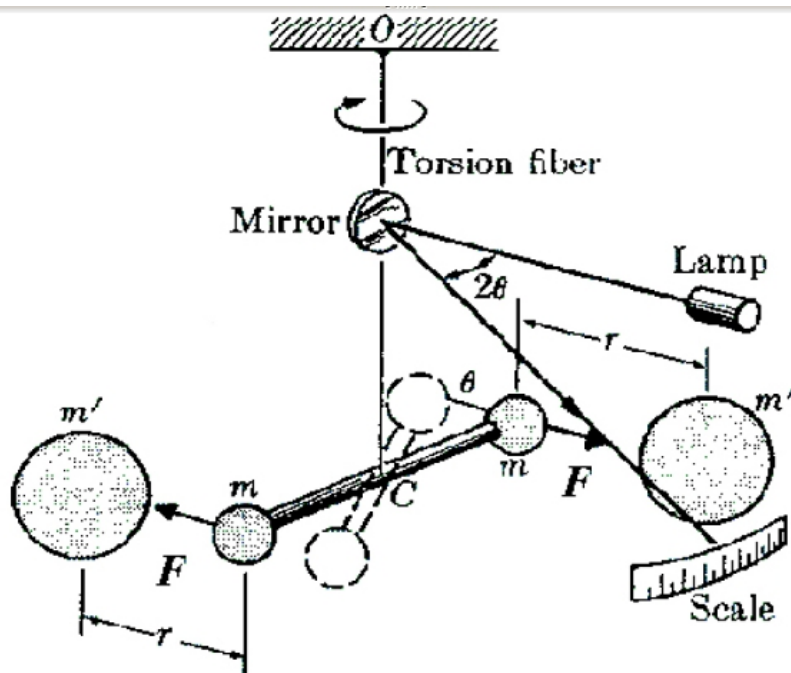


fig.10 Schema di una bilancia di torsione

Il momento dovuto alla forza gravitazionale è uguale a quello di reazione dovuto alla torsione elastica. Per piccoli angoli quest'ultimo può essere considerato proporzionale alla misura di θ in radianti e si può scrivere:

$$k\theta = Gmm'd/r^2.$$

Trascurando la massa del filo, la costante di torsione si può infine ricavare dal

periodo dalle oscillazioni e dal momento d'inerzia del corpo rigido costituito dalle due masse m e dall'asta che le unisce. Valutare in un esperimento di precisione gli errori (dovuti alla non omogeneità delle masse, agli effetti di non linearità, all'inelasticità del filo, ai diversi modi di vibrazione, al rumore termico) è stata un'impresa ardua che continua ancora.

Il tentativo di superamento dell'impasse attuale sulle misure di G

Probabilmente la lettera greca più ricorrente nei testi di matematica e di fisica è π . Il simbolo del numero irrazionale, specie nella scuola media, viene spesso sostituito dal valore numerico approssimato 3,14, con l'avvertenza che è possibile avere un'approssimazione migliore utilizzando l'apposito tasto di una calcolatrice scientifica. Applicazioni avanzate di matematica del resto permettono la determinazione di π con migliaia di cifre decimali con una velocità di calcolo impensabile fino a pochi anni fa.

Le costanti fisiche, a differenza di quelle matematiche, sono limitate a poche cifre significative. Una delle più conosciute, la velocità della luce nel vuoto, c , ha il valore esatto indicato con nove cifre. Allo stato attuale essa costituisce un'eccezione tra le costanti fisiche.

Nel 2018 le nuove definizioni delle unità delle grandezze fondamentali del Sistema Internazionale (basate sulla carica elementare, il numero di Avogadro, la costante di Planck e quella di Boltzmann) dovrebbero riuscire a colmare il divario. Lo stato dell'arte delle misurazioni fisiche presenta altri casi in cui gli errori relativi raggiungono il valore di 5 parti su mille miliardi ($5 \cdot 10^{-12}$) e la stessa industria meccanica di precisione può lavorare un metallo di lunghezza venti centimetri con un'incertezza relativa di 5 parti per milione ($5 \cdot 10^{-6}$). Un risultato notevole se confrontato con la costante di gravitazione universale. I valori estremi riportati negli articoli di ricerca degli ultimi anni per G oscillano in un ampio intervallo:

$$6,671 - 6,676 (10^{-11} \text{ m}^3\text{Kg}^{-1}\text{s}^{-2}).$$

Le precisioni indicate nelle singole esperienze possono avere valori di poche parti per milione, ma l'insieme dei dati non appare compatibile. I riassunti periodici delle costanti fisiche CODATA (*the Committee on Data for Science and Technology*)

testimoniano la bassa precisione complessiva di G grande, relegata nella posizione di cenerentola delle costanti.

Quantity	2010 rel. std. uncert. u_r	Quantity	2010 rel. std. uncert. u_r
α	3.2×10^{-10}	F	2.2×10^{-8}
R_K	3.2×10^{-10}	γ'_P	2.5×10^{-8}
a_0	3.2×10^{-10}	μ_B	2.2×10^{-8}
λ_C	6.5×10^{-10}	μ_N	2.2×10^{-8}
r_e	9.7×10^{-10}	μ_e	2.2×10^{-8}
σ_e	1.9×10^{-9}	μ_p	2.4×10^{-8}
h	4.4×10^{-8}	R	9.1×10^{-7}
m_e	4.4×10^{-8}	k	9.1×10^{-7}
m_h	4.4×10^{-8}	V_m	9.1×10^{-7}
m_α	4.4×10^{-8}	c_2	9.1×10^{-7}
N_A	4.4×10^{-8}	σ	3.6×10^{-6}
E_h	4.4×10^{-8}	G	1.2×10^{-4}
c_1	4.4×10^{-8}		
e	2.2×10^{-8}		
K_J	2.2×10^{-8}		

$$F_1 = F_2 = G \frac{Mm}{r^2}$$

fig.11 Le costanti fisiche ordinate secondo la precisione delle misure sperimentali

Confrontando i valori raccomandati nel 2006 e nel 2010 per G :

$$(6,67428 \pm 0,00067) 10^{-11} \text{m}^3 \text{Kg}^{-1} \text{s}^{-2} - (6,67384 \pm 0,00080) 10^{-11} \text{m}^3 \text{Kg}^{-1} \text{s}^{-2},$$

si ottengono incertezze relative rispettivamente di 100 ppm (parti per milione) e 120 ppm. Numeri enormi, superiori a quelli caratteristici di qualsiasi altra costante. Non tollerabili neanche nell'industria di precisione. Inoltre la rappresentazione dei valori di CODATA 2010 e delle misure sperimentali evidenzia segmenti lontanissimi non aventi intersezioni comuni.

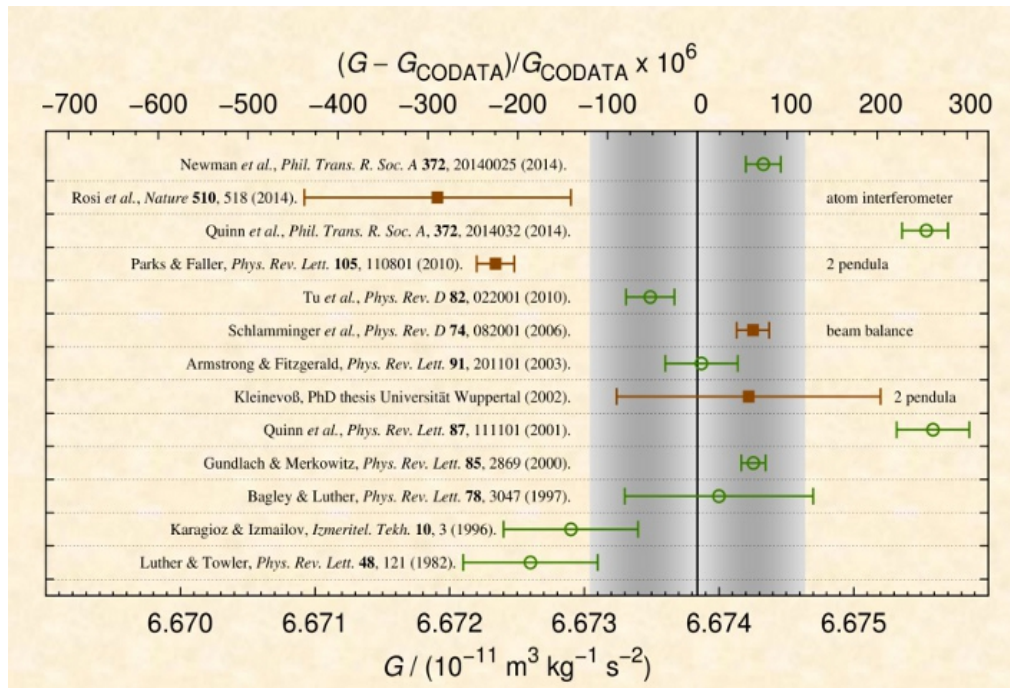


fig.12 Il confronto delle misure attuali di G , con l'indicazione degli articoli di ricerca dei diversi gruppi

Così nel 2010, Harold Parks e James E. Faller, ricercatori dell'Istituto JILA dell'Università del Colorado, con misure realizzate con un pendolo semplice proponevano il valore:

$$G=(6,67234\pm 0,00014)10^{-11}\text{m}^3\text{Kg}^{-1}\text{s}^{-2};$$

mentre quello del BIPM francese coordinato da Terry Quinn nel 2013 otteneva con una bilancia di torsione:

$$G=(6,67545\pm 0,00018)10^{-11}\text{m}^3\text{Kg}^{-1}\text{s}^{-2}.$$

La differenza tra le due misure medie è superiore a 0,003, venti volte più grande dell'incertezza assoluta proposta. La dispersione delle misure è troppo ampia per non supporre una stima ottimistica degli errori o la presenza di effetti sistematici trascurati.

Per rispondere all'interrogativo: "La costante di gravitazione della legge di Newton è troppo difficile da misurare?", nel 2014 i maggiori esperti del settore si sono incontrati dapprima in Inghilterra e nel mese di ottobre negli Stati Uniti. I diversi interventi sono stati pubblicati sempre nel mese di ottobre nel volume 372 della rivista curata dalla Royal Society. Gran parte del lavoro svolto nel workshop statunitense del NIST (*National Institute of Standards and Technology*) è disponibile in rete a [questo indirizzo web](#).

La rivisitazione degli esperimenti passati si è concentrata sulle bilance di torsione. Nel metodo alla Cavendish (*static deflection*) è assai difficile valutare gli errori. Il metodo con due condizioni iniziali molto diverse (*time of swing*) sembra condurre a errori sistematici che tendono ad accrescersi apportando le correzioni di inelasticità. La [controreazione](#) elettrostatica (*electrostatic servo*) potrebbe presentare problemi legati alle variazioni della capacità. Infine il metodo di retroazione (*angular acceleration*) basato sull'accelerazione angolare è difficilmente riproducibile.

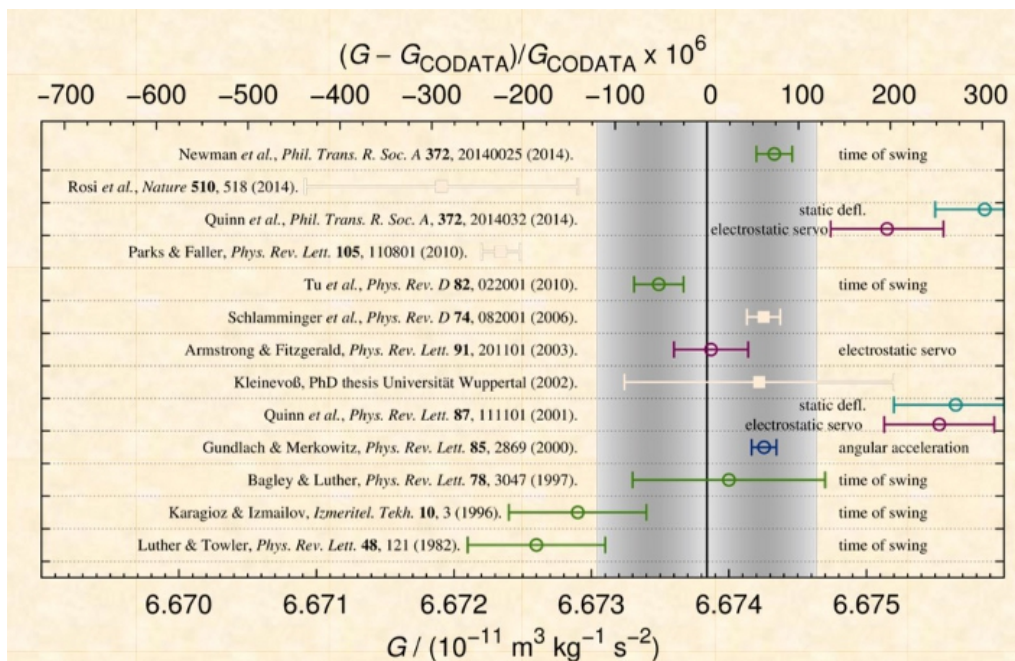
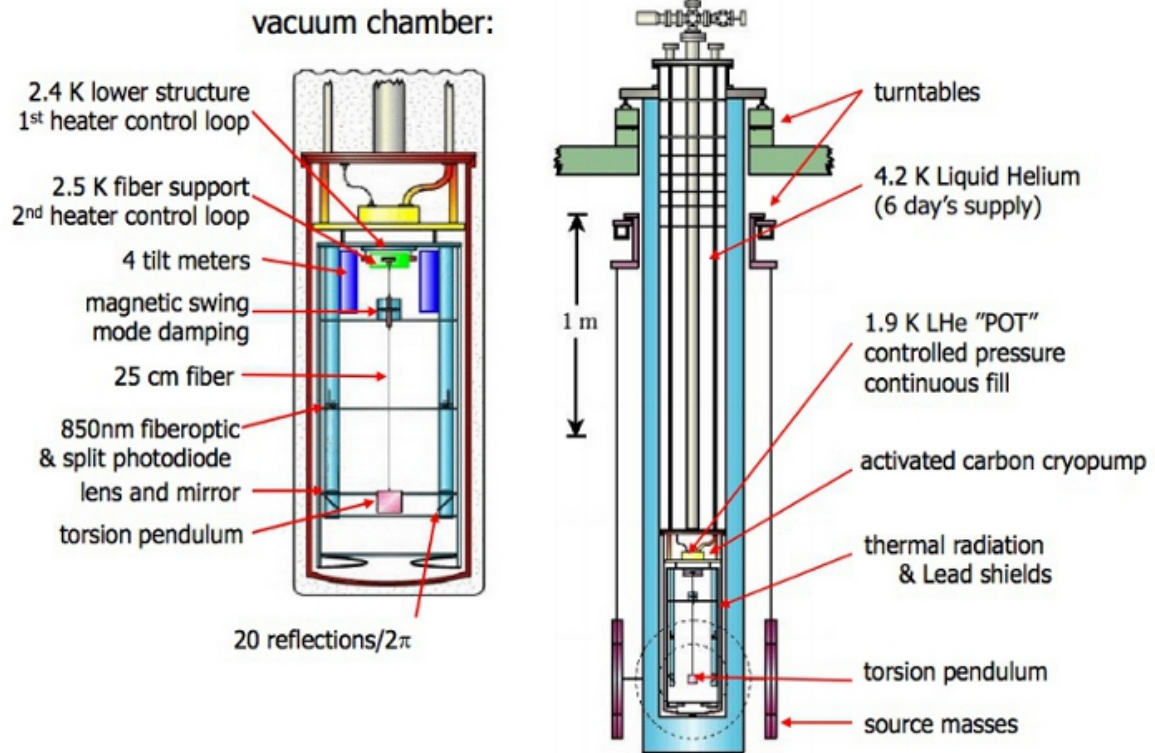


fig.13 Le misure di G con bilance di torsione raggruppati secondo i diversi metodi

La vera novità dei convegni sono stati gli interventi di Riley Newman dell'Università di Irvine della California che, analizzando con un pendolo di torsione criogenico a basse temperature i principali materiali utilizzati nei fili, ha presentato valori probabili per tre diverse fibre (CuBe, CuBe trattato termicamente, Al 5056) tutte di poco superiore a

6,674 e con valore medio complessivo pari a $6,67433 \pm 0,00013$ (incertezza relativa di 19 ppm). I valori sono indicati nella letteratura specialistica come UCI 14.

Apparatus



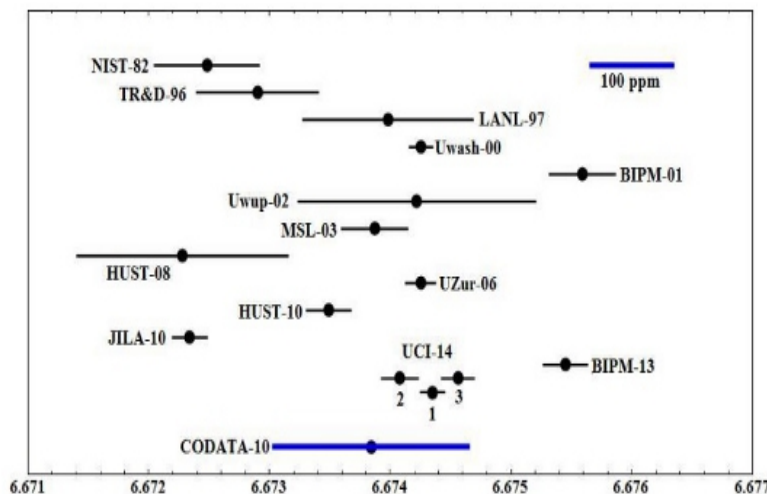
CPEM 2008

fig.14 L'apparato sperimentale della bilancia di torsione criogenica

Fiber	$G \times 10^{11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$	$\delta G(ppm)$
1	6.67435(10)	14
2	6.67408(15)	22
3	6.67455(13)	20
unwtd mean	6.67433(13)	19

fig.15 Le più recenti misure di G;
fig.16 Il confronto dei nuovi dati sperimentali della costante universale di gravitazione

Le nuove misure di G sono state analizzate dal decano Terry Quinn. Il direttore emerito del BIPM sempre nel workshop ha elaborato, cercando in rosso nella figura che segue, i dati che permetterebbero di dare per la costante di gravitazione universale un'incertezza relativa di 30 ppm (con un salto di un fattore 4 rispetto a CODATA 2010).



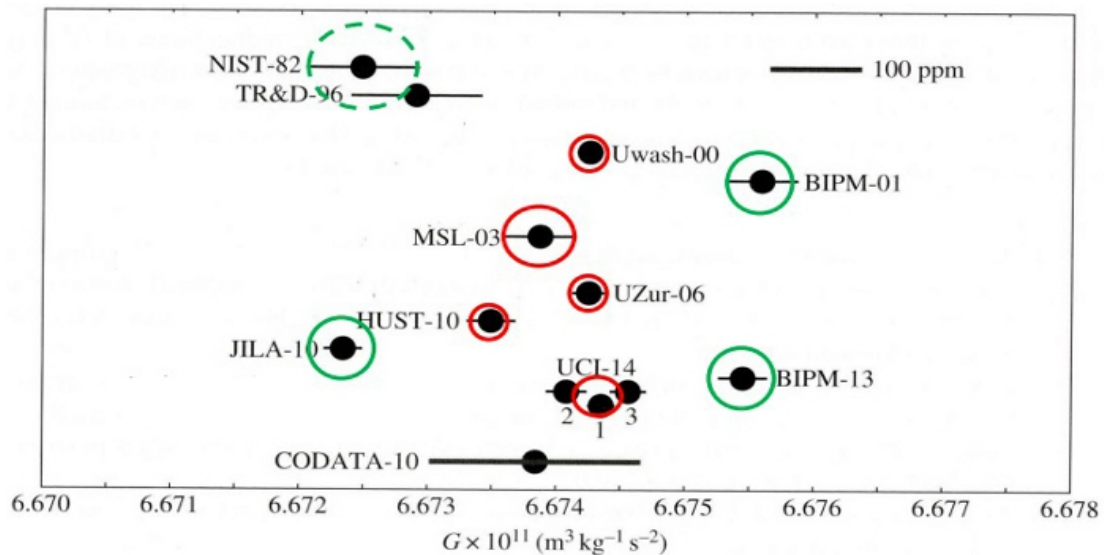


fig.17 Dati compatibili in rosso e incompatibili in verde della misura di G

Al di fuori di questo scenario si collocherebbero le misure cerchiare in verde. Dati che andrebbero comunque testati.

CODATA stabilirà il nuovo valore raccomandato di G , scartando probabilmente molte misure e analizzando statisticamente le altre. La situazione per la cenerentola delle costanti è particolarmente complessa. L'ipotesi più probabile è che la sua incertezza relativa migliorerà rispetto al valore del 2010, avvicinandosi almeno a quella di un buon prodotto industriale.