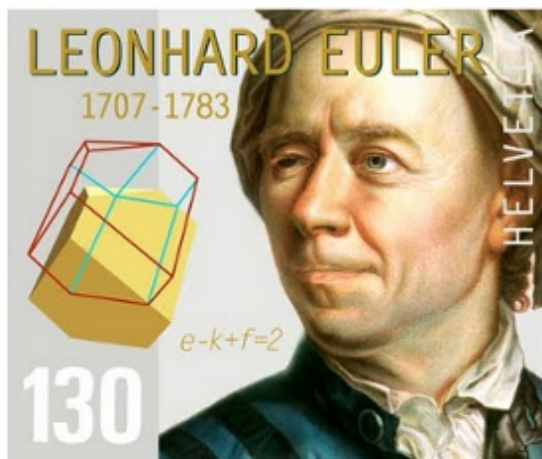


LA LEZIONE

Il problema dei tre corpi

Newton e la comunità dei matematici, fisici e astronomi, dopo la pubblicazione dei Principia, si occuparono del problema meccanico di punti materiali interagenti gravitazionalmente. Dopo aver risolto nel Settecento il problema dei due corpi si cercò per due secoli la soluzione di quello dei tre corpi. Tra la metà del XVIII e l'inizio del XX secolo alla questione, secondo June Barrow-Green, furono dedicati più di ottocento lavori. Illustri scienziati come l'italo-francese Joseph Louis (Giuseppe Luigi) Lagrange e Leonhard Euler affrontarono con successo alcuni casi particolari di soluzione, come ho accennato nella lezione sulla legge di gravitazione. L'Académie des Sciences per i loro contributi premiò entrambi. In particolare Euler nelle memorie sul moto lunare affrontò un modello semplificato con due masse fisse nello spazio e la terza che si muoveva sotto l'azione delle altre due. In seguito i due corpi primari, di massa molto più grande del terzo, furono messi in rotazione secondo orbite circolari intorno al loro centro di massa, mentre il terzo planetario, di massa trascurabile, risentiva dell'effetto gravitazionale congiunto. Questo caso particolare del problema dei tre corpi che, con opportune coordinate, si riduceva a due masse fisse e la terza in moto, fu chiamato dopo Poincaré, problema ristretto dei tre corpi.



[fig.1](#) Giuseppe Luigi Lagrange in un francobollo commemorativo; [fig.2](#) Francobollo commemorativo per Leonhard Euler; [fig.3](#) Il marchese Pierre-Simon Laplace in una stampa

L'attenzione alle interazioni gravitazionali nasceva almeno in parte dalla volontà di rispondere alla domanda se il sistema solare fosse stabile. In altre parole, le orbite ellittiche, soluzione del problema dei due corpi per la coppia pianeta Sole, sotto la perturbazione degli altri pianeti che provocavano variazioni secolari dei parametri cinematici del moto, sarebbero state sempre un tratto distintivo del Sistema solare? Oppure le anomalie avrebbero portato un pianeta al di fuori di esso o verso un'attrazione fatale verso il Sole?

Pierre-Simon de Laplace discusse più volte le variazioni secolari più marcate di Giove e Saturno e il moto medio lunare, concludendo, nella sua Meccanica celeste, che l'insieme dei pianeti e del Sole costituiva un insieme stabile. Nella prima metà dell'Ottocento, dal punto di vista più generale della Meccanica analitica, si iniziarono ad affermare, grazie soprattutto all'opera dell'astronomo William R. Hamilton e del matematico Friedrich Heinrich Jacobi, formalismi in cui assumevano grande importanza particolari coordinate e si univano le teorie delle equazioni differenziali e i principi variazionali. Nella seconda metà del secolo, Charles-Eugène Delaunay arrivò per primo all'eliminazione dei termini secolari che mostravano una crescita nel tempo

nella teoria del moto lunare. Dopo venti anni di calcoli il professore di meccanica pubblicò nel 1860 e 1867 due volumi nei quali le coordinate della Luna erano espresse attraverso serie trigonometriche, combinazioni lineari delle funzioni seno e coseno. In esse il tempo compariva solo come argomento dei termini periodici. Le lunghissime equazioni erano sviluppate da una funzione perturbatrice e considerate fino al settimo ordine. In linea di principio le serie erano costituite da infiniti termini e dipendevano da particolari condizioni iniziali. Nel 1870 Delaunay divenne direttore dell'Osservatorio di Parigi (fino alla sua morte avvenuta nel 1872).

THEORIE DE LA LUNE DE DELAUNAY. 189
 On remarquera que, dans la formule (12) les coefficients A, ainsi que la partie B, dépendent seulement des variables L, G, H; quant aux variables conjuguées, l, g, h, elles figurent uniquement dans les arguments et sous forme linéaire.
 Voici le développement de R, en conservant seulement les quantités du quatrième ordre et quelques-unes du cinquième :

$$\begin{aligned}
 R = & \frac{\mu}{2a} + m' \frac{a^4}{a'^3} \left[\frac{1}{4} - \frac{3}{2} l^2 + \frac{3}{8} e^2 - \frac{3}{8} e'^2 - e \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} e'^2 \right) \cos l + \frac{3}{4} e' \cos l' \right. \\
 & - \frac{1}{8} e^2 \cos 2l - \frac{3}{4} e' \cos(l-l') - \frac{3}{4} e' \cos(l-l') + \frac{9}{8} e^3 \cos 2l \\
 & + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2} l^2 - \frac{15}{8} e'^2 - \frac{15}{8} e'^4 \right) \cos(2l + 2g + 2h - 2l' - 2g' - 2h') \\
 & - \frac{3}{8} e^2 \cos(2l + 2g + 2h - l - 2g' - 2h') \\
 & - \frac{21}{8} e' \cos(2l + 2g + 2h - 3l' - 2g' - 2h') \\
 & - e \left(\frac{9}{4} - \frac{15}{8} e'^2 \right) \cos(l + 2g + 2h - 2l' - 2g' - 2h') \\
 & + e \left(\frac{3}{4} - \frac{15}{8} e'^2 \right) \cos(3l + 2g + 2h - 2l' - 2g' - 2h') \\
 & - \frac{31}{8} e^3 \cos(2l + 2g + 2h - 4l' - 2g' - 2h') \\
 & + \frac{9}{8} e' \cos(l + 2g + 2h - l - 2g' - 2h') \\
 & - \frac{63}{8} e' \cos(l + 2g + 2h - 3l' - 2g' - 2h') \\
 & - \frac{3}{8} e' \cos(3l + 2g + 2h - l - 2g' - 2h') \\
 & - \frac{21}{8} e' \cos(3l + 2g + 2h - 3l' - 2g' - 2h') \\
 & - \frac{15}{8} e^3 \cos(2g + 2h - 2l' - 2g' - 2h') \\
 & + \frac{3}{4} e^2 \cos(4l + 2g + 2h - 2l' - 2g' - 2h') + \frac{3}{2} e^3 \cos(2l + 2g) \\
 & + \frac{3}{2} e^2 \cos(2l + 2h - 2g' - 2h') + \frac{3}{8} e' \cos(l + g - h - l' - g' - h') \\
 & \left. + \frac{3}{8} e' \cos(3l + 2g + 2h - 3l' - 2g' - 2h') \right]
 \end{aligned}$$

90. Étude générale d'une opération élémentaire. — Delaunay considère à part l'un des termes périodiques, en posant
 (16) $R = -A \cos(il + l'g + l''h + l'''n + q) - B + B_1,$



fig.4 Esempi di sviluppi in serie nella teoria lunare di Delaunay; fig.5 Il re Oscar II di Svezia

Il suo metodo, negli anni seguenti, fu ripreso modificato e ampliato da diversi autori (tra gli altri, Simon Newcomb, Félix Tisserand, Anders Lindstedt, Johan August Hugo Gylden ed Ernest William Brown). La risoluzione delle equazioni dinamiche attraverso serie infinite, pur portando ad applicazioni (in genere grazie ai primi termini dello sviluppo), non era rigorosa, non affrontava il problema matematico della convergenza delle serie infinite e lasciava inalterato il problema della stabilità del Sistema solare. Un primo passo verso l'abbandono delle piccole perturbazioni dei moti ellittici fu compiuto dall'americano George W. Hill che nel 1877 presentò un nuovo modo di affrontare il problema dei tre corpi ristretto. Il tentativo dell'astronomo, che riprendeva il caso particolare di Euler (un planetoido sotto l'influenza di due corpi celesti di grande massa che ruotavano su orbite circolari), fu quello di analizzare il comportamento del planetino nell'intorno di un'orbita periodica. Hill mostrò che un insieme di famiglie di soluzioni periodiche potesse essere caratterizzato da un certo parametro, dipendente dal rapporto di due tempi: quello proprio dell'orbita periodica del planetino e il periodo legato all'orbita circolare del corpo di massa maggiore. Nel 1885 il re di Svezia Oscar II istituì un premio su quattro argomenti fisico-matematici. Il primo era la risoluzione del problema di enne corpi, attratti gravitazionalmente, espressa attraverso una serie convergente.

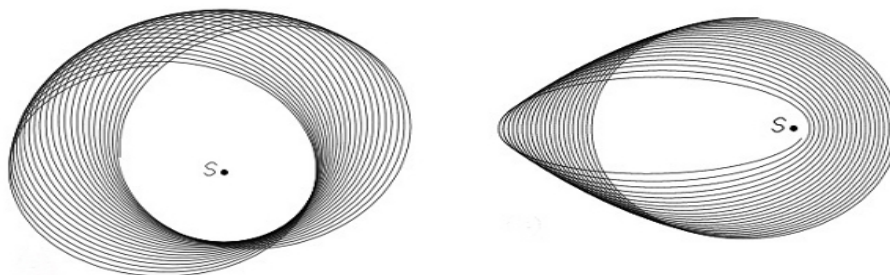
La meccanica celeste di Poincaré

I metodi matematici dei predecessori di Poincaré furono essenzialmente algebrici. In tali approcci, l'energia E era scritta come somma dell'energia E_0 del sistema imperturbato e di altri termini dipendenti da un parametro ε piccolo. Per chiarire i metodi perturbativi è possibile ricorrere a un esempio meccanico molto conosciuto: quello del pendolo. La perturbazione può essere considerata una forza addizionale periodica di ampiezza ε avente espressione $\varepsilon \cos(\omega t)$. La soluzione delle piccole oscillazioni, se la frequenza propria del pendolo è diversa da quella della forzante, si può scrivere come una combinazione della soluzione del problema con $\varepsilon = 0$ e una funzione periodica caratterizzata dalla pulsazione ω . Nel caso invece di risonanza (le due frequenze uguali) la soluzione ha un'ampiezza crescente uniformemente con il tempo. Se complichiamo il problema del pendolo facendo intervenire altre forze (con termini non lineari) ci si può chiedere se la soluzione del sistema sia sempre la sovrapposizione di due soluzioni: una propria del sistema imperturbato e l'altra caratteristica dell'oscillazione forzata.

I metodi perturbativi applicati alla soluzione del problema meccanico prevedevano che le coordinate $x(t)$ dipendessero da una serie di potenze del parametro ε (il metodo delle approssimazioni successive) secondo l'espressione:

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

Il problema veniva così ricondotto a un sistema ricorsivo a partire da una soluzione periodica iniziale. La speranza di poter scrivere, nel caso del problema dei tre corpi, una soluzione in cui comparivano argomenti espressi da combinazioni di poche frequenze di base (una sorta di ritorno alla teoria dei deferenti e degli epicicli di Tolomeo) cozzava con la comparsa di termini perturbativi secolari. Inoltre era assai difficile dimostrare le convergenze delle serie utilizzate. Ad esempio una variazione lenta e regolare del perielio, mantenendo costanti l'eccentricità dell'ellisse, produce una precessione effettivamente osservata del moto dei pianeti. D'altra parte un incremento regolare dell'asse maggiore dell'ellisse renderebbe l'orbita più schiacciata e l'avvicinamento del pianeta al Sole con la conseguente fine del pianeta stesso.



[fig.6](#) La precessione del piano dell'ellisse di un pianeta nella teoria delle perturbazioni; [fig.7](#) Perturbazione secolare dell'eccentricità dell'orbita di un pianeta che porterebbe alla distruzione dello stesso

Come affermava Poincaré già nel 1885 (mentre affrontava la teoria delle equazioni differenziali da un punto di vista geometrico): *“Questo studio qualitativo possiede anche di per se stesso un interesse primario. [...] Consideriamo per esempio il problema dei tre corpi: non è forse possibile domandarsi se uno dei corpi rimarrà sempre in una certa regione del cielo o se invece potrà allontanarsi indefinitamente? Se la distanza tra i due corpi aumenterà o diminuirà sempre di più, o se invece rimarrà compresa fra certi valori limite? Non è forse possibile porsi migliaia di interrogativi di questo genere, che avranno tutti una risposta non appena si sapranno costruire qualitativamente le traiettorie dei tre corpi? E considerando un numero*

maggiore di corpi, in che cosa consiste il problema dell'invariabilità degli elementi di orbita dei pianeti se non un vero e proprio problema di geometria qualitativa, dato che far vedere che l'asse maggiore non subisce variazioni secolari equivale a dimostrare che oscilla costantemente fra certi valori limite." (U. Bottazzini, Poincaré, I grandi della scienza, Le Scienze, 1999, p. 60)

Dunque per dimostrare la stabilità del Sistema solare, le orbite dovevano mantenersi limitate; le distanze reciproche non potevano diventare troppo piccole; e, seguendo Poisson, Poincaré aggiungeva che il singolo pianeta poteva tornare vicino quanto si vuole (infinite di volte) allo stato iniziale.

Il lavoro di Poincaré, sulla meccanica celeste e la teoria delle equazioni differenziali, lo portò nel 1889 alla vincita del premio indetto dal re Oscar II e nel 1890 alla stesura della memoria sui tre corpi. Come spiega June Barrow Green: *"Oggi tuttavia sappiamo che questa monografia tanto apprezzata è in realtà molto diversa dalla versione a cui venne effettivamente conferito il premio. Nell'introduzione della versione data alle stampe, Poincaré riconosceva sì di aver ritoccato il lavoro per la pubblicazione, ma non indicava in alcun modo la natura e la portata di quelle modifiche. La scoperta di una versione stampata e annotata dall'autore stesso ha rivelato però la vera consistenza di quella revisione, mostrando come nella versione originale non vi fosse traccia di alcuni dei principali risultati che oggi hanno reso famoso quel lavoro. Cosa ancor più importante, essa ha evidenziato come i nuovi risultati ottenuti da Poincaré non fossero semplici estensioni dei precedenti, ma fossero dovuti piuttosto alla scoperta, soltanto pochi giorni prima del termine utile per la pubblicazione del saggio, di un errore significativo. Questa scoperta costrinse Poincaré a riscrivere gran parte del lavoro, attività, questa, che ritardò non poco la pubblicazione. Anche se la presenza dell'errore era nota ad alcuni dei suoi contemporanei, le sue conseguenze sono state comprese solamente di recente; che si trattasse di un errore significativo è evidente: fu proprio nel tentativo di correggerlo infatti che Poincaré scoprì il fenomeno del caos. Naturalmente la scoperta di quell'errore lo turbò e lo indusse persino a dubitare che il suo saggio fosse meritevole di essere premiato. Sebbene non ci fosse alcuna intenzione di privarlo del premio, Poincaré dovette pagare personalmente la ristampa del saggio e sostenere così una spesa ben superiore all'entità del premio vinto."*

Il punto di partenza di Poincaré per la risoluzione del problema dei tre corpi era l'utilizzo di una serie di potenze della massa μ del più piccolo tra i due corpi pesanti ruotanti secondo orbite circolari. La classificazione delle possibili orbite periodiche che mantenevano le masse nelle stesse posizioni relative portava allora a tre tipi di soluzioni: i tre corpi avevano inclinazione nulla e le orbite si svolgevano su uno stesso piano; ancora i corpi dovevano avere inclinazione nulla ed eccentricità finite; nel terzo caso le inclinazioni erano finite e le orbite pressoché circolari. A questo punto metodi geometrici qualitativi aiutavano Poincaré a trattare le soluzioni che differivano poco da quelle periodiche considerate per tempi estremamente lunghi e dette per questo asintotiche (per tempi tendenti a $+\infty$, e tempi tendenti a $-\infty$). Il fisico matematico francese nel 1891, in uno dei suoi lavori sul Problema dei tre corpi, spiegava a un pubblico di non specialisti, uno dei nuovi concetti matematici. Seguiamo le sue parole.

"Immaginiamo una terra e un sole isolati nello spazio. Supponiamo ancora per semplicità che il loro moto sia circolare. Diamo adesso a questa terra due satelliti L_1 e L_2 di massa infinitamente piccola di modo che non turberanno il moto circolare della terra e del sole e che non interferiranno reciprocamente. Scegliamo la posizione iniziale della luna L_1 in modo che descriva un'orbita periodica. Potremo poi scegliere quella di L_2 in maniera tale che questo secondo satellite descriva quella che chiameremo orbita asintotica. Dapprima abbastanza lontana da L_1 , dopo un tempo

*infinitamente lungo si avvicinerà indefinitamente [a quella] di L_1 . Se L_1 descrive una curva chiusa C , la luna L_2 descriverà una sorta di spirale [...] che si avvicinerà indefinitamente a C . Essa è composta da un'infinità di orbite asintotiche parallele. L'insieme di queste orbite forma una superficie continua S che passa per la curva C e sulla quale sono tracciate le spire [...]. Ma ci può essere una seconda categoria di soluzioni asintotiche. Scegliamo convenientemente la posizione iniziale di L_2 [...], la sua orbita differirà [ora] sempre di più da quella di L_1 . Il nostro osservatore vedrà il satellite descrivere ancora una curva a spirale che [però] si allontanerà indefinitamente dalla curva C [...]. L'insieme di queste nuove orbite asintotiche formerà una seconda superficie S' [...]. Infine esisterà un'infinità di soluzioni doppiamente asintotiche, per le quali il satellite L_2 si avvicinerà e poi si allontanerà da L_1 [...]. Questa luna si troverà su S' descrivendo spire che si allontanano da C [...], ma dopo un tempo estremamente lungo essa si ritroverà su S le cui spire si avvicinano a C . Prendiamo $n-1$ lune che descrivono orbite doppiamente asintotiche[...]. [Esse costituiscono] una prova eclatante della complessità del problema dei tre corpi e dell'impossibilità della sua risoluzione con gli strumenti attuali dell'analisi." (H. Poincaré, *Le problème des trois corps*, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 1891, pp. 770-771).*

Poincaré nel gennaio 1891 aveva già corretto gli errori che lo avevano portato alla prima stesura della memoria sui tre corpi. Inizialmente il matematico aveva cercato di ricavare per il problema ristretto le equazioni esatte delle soluzioni asintotiche sotto forma di una serie di potenze di μ con il metodo delle approssimazioni successive. Poi, sulla base di un'ipotesi particolare scambiata per generale, credette nel 1888 di aver dimostrato che, per valori sufficientemente piccoli della massa, corrispondeva a una soluzione periodica instabile, un insieme di soluzioni asintotiche stabili. Pur non affrontando i dettagli tecnici del lavoro di Poincaré qui basti ricordare che per analizzare il comportamento del pianetino nell'intorno di un'orbita periodica l'autore adottò un metodo bidimensionale in cui si lavorava con superfici perpendicolari all'orbita. Una soluzione periodica si riduceva così a un punto fisso P sulla sezione. La mappa per una soluzione asintotica del tempo tendente a $+\infty$ era un insieme di punti che si avvicinavano a P , mentre per t tendente a $-\infty$ i punti si allontanavano da P . L'errore fu di credere che la mappa fosse una curva chiusa. Essa in realtà era l'insieme di due curve con un punto d'intersezione. Una soluzione doppiamente asintotica, che, a sua volta, generava infinite altre soluzioni doppiamente asintotiche, con un crescendo di complessità che Poincaré non era riuscito a chiarire con un disegno esplicativo e che descriveva con un brano famoso:

*"Tentiamo di farci un'idea della figura formata da queste due curve e delle loro intersezioni, che sono in numero infinito e corrispondono ciascuna a una soluzione doppiamente asintotica; queste intersezioni formano una sorta di reticolo, di ordito, di rete, dalle maglie infinitamente fitte; ciascuna delle due curve non deve mai intersecare se stessa, ma deve ripiegarsi su stessa in maniera assai complicata per poter intersecare un'infinità di volte tutte le maglie della rete. Si rimarrà impressionati dalla complessità di questa figura, che nemmeno tento di disegnare. Nulla è più adeguato a darci un'idea di quanto sia complicato il problema dei tre corpi e in genere tutti i problemi di dinamica nei quali non esistono integrali uniformi." (H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, 1899, p.389; traduzione di C. Bartocci)*

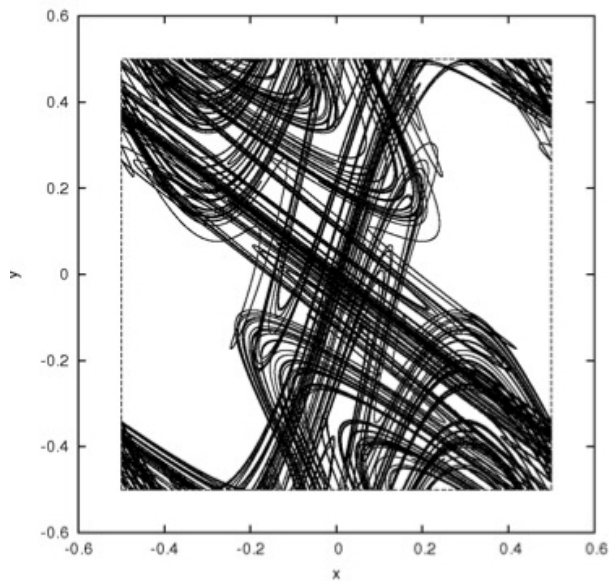


fig.8 Esempio di curve caotiche nello spazio delle fasi

L'impiego di metodi geometrici qualitativi applicati alla risoluzione del problema dei tre corpi lo aveva condotto a individuare un comportamento caotico e la dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali in sistemi meccanici che, a priori, non avevano niente di casuale. Il caso entrava in gioco perché piccolissime variazioni delle condizioni iniziali non comportavano cambiamenti dello stesso ordine di grandezza degli stati successivi, anzi per tempi lunghi il comportamento del sistema poteva essere del tutto imprevedibile.

La mappa logistica

La trattazione moderna del caos deterministico in genere parte da un approccio qualitativo alla soluzione delle equazioni differenziali (un altro dei contributi importanti di Poincaré alla fisica matematica). Sono così classificati nello spazio degli stati (fasi) del sistema alcuni punti caratteristici, curve (cicli limite), superfici (tori). D'altra parte si possono introdurre molti concetti matematici della dinamica del caos con equazioni e modelli semplificati senza far uso del calcolo differenziale. L'alternativa è stata resa possibile solo con la diffusione dei personal computer. Ad esempio sulla mappa logistica esistono programmi sviluppati con le principali applicazioni matematiche. Senza arrivare a tanto è possibile ricorrere a un foglio di calcolo. Un altro contributo importante a questa parte della lezione è legato a corsi per insegnanti svolti molti anni fa da Angelo Zanni in un liceo romano.

Il problema matematico iniziale può essere considerato la risoluzione di un'equazione di analisi funzionale $x=f(x)$. Solo per particolari proprietà della funzione (teorema delle contrazioni) si può essere certi che l'equazione ammetta almeno una soluzione e che questa possa essere trovata con un processo iterativo convergente. Prendiamo un esempio semplice $x=\cos x$, disegnando in un piano cartesiano la prima bisettrice $y=x$ e la funzione trigonometrica $y=\cos x$, è immediato vedere che l'intersezione delle due curve rappresenta la soluzione dell'equazione.

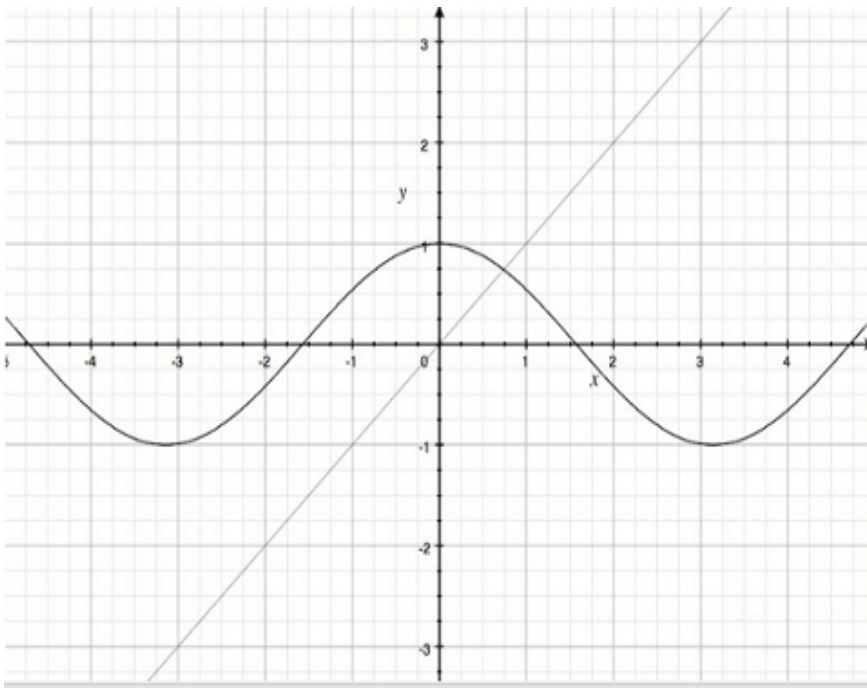


fig.9 Le funzioni $y=\cos x$ e $y=x$ nel piano cartesiano disegnate con il programma Grapher;

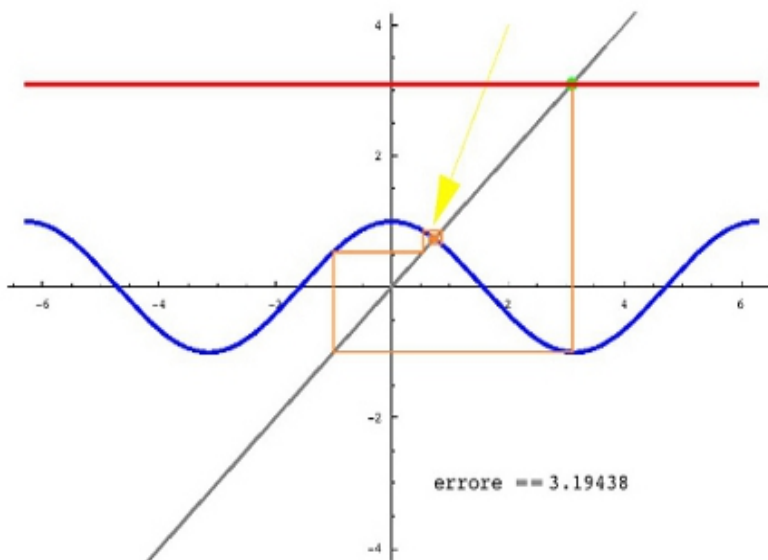


fig.10 Il metodo iterativo per la soluzione dell'equazione $x=\cos x$

È possibile assegnare un qualsiasi valore x_0 a x , sostituirlo all'argomento del coseno e iterare il processo per ottenere la soluzione (l'attrattore del processo). Graficamente si può rappresentare l'iterazione con un insieme di segmenti verticali che passano dalla retta alla funzione e orizzontali dal coseno alla retta che rapidamente convergono verso $x=0,738939$. Ripetiamo lo stesso procedimento iterativo per un'espressione di cui si conoscono le soluzioni $x=x^2$ ($x=0$, $x=1$). Ora si capisce che per $-1 < x_0 < 1$ il processo iterativo converge verso zero (questo intervallo è chiamato dominio di attrazione), mentre per $x_0 > 1$ e $x_0 < -1$ la serie diverge e non porta alla determinazione della seconda soluzione. Il punto $x=1$ è chiamato repulsore.

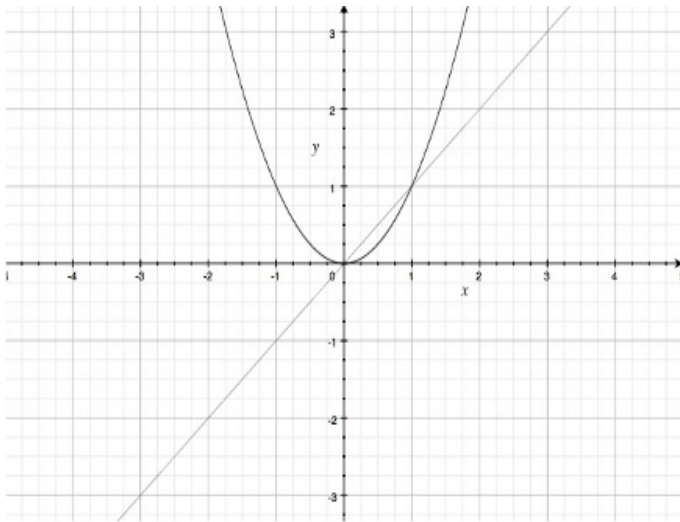


fig. 11 Le funzioni $y=x^2$ e $y=x$ nel piano cartesiano disegnate con il programma Grapher;

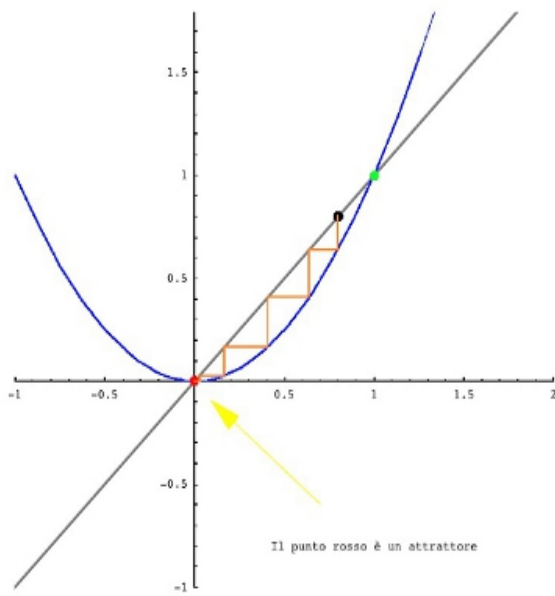


fig.12 Convergenza del processo ricorsivo verso l'origine;

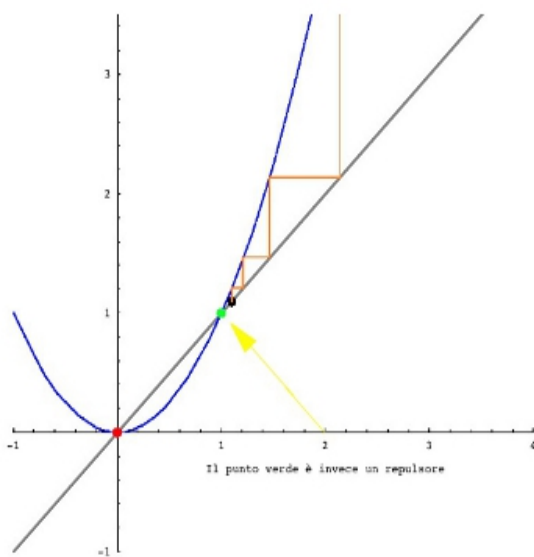


fig.13 Allontanamento del processo iterativo dal punto instabile

Affrontiamo adesso il problema più generale di un'equazione alle differenze finite che dipende da un parametro. Il modello diffuso dal biologo Robert May nel 1976 vuole descrivere una popolazione in un territorio finito che fornisce cibo a un numero limitato di animali. La crescita percentuale della popolazione in un anno dipenderà dalla percentuale degli animali presenti nell'anno precedente (riproduzione) e da un fattore che dovrà tener conto della finitezza delle risorse. Indicando con x_n il rapporto tra la popolazione esistente nell'anno n e quella massima, l'equazione detta mappa logistica può essere scritta nella forma: $x_n = rx_{n-1}(1 - x_{n-1})$, con r parametro arbitrario. Per $0 \leq x_n \leq 1$ e $0 \leq r \leq 4$ tutte le traiettorie sono comprese in un intervallo limitato. Il problema che ci si può porre è allora il seguente: fissato il valore di r la popolazione tenderà a uno o più valori stabili? Una soluzione dell'equazione precedente è $x_n = 0$, instabile (un repulsore) per $r > 1$ (al crescere di n , una condizione iniziale vicina allo zero si allontanerà dal punto). L'altra soluzione è $x_{n-1} = x_n = 1 - 1/r$, come è facile dimostrare sostituendo i valori nella equazione della mappa logistica. Il punto è un attrattore solo per $1 < r < 3$. In altre parole per qualsiasi valore iniziale il bacino di attrazione è l'intero insieme di definizione di x . Così utilizzando un foglio di calcolo è possibile tentare di risolvere l'equazione iterando il processo, a partire da un valore arbitrario. Nella fig.14 è rappresentato il processo ricorsivo per $r=2,6$ che porta al punto fisso $x=0,61538462$.

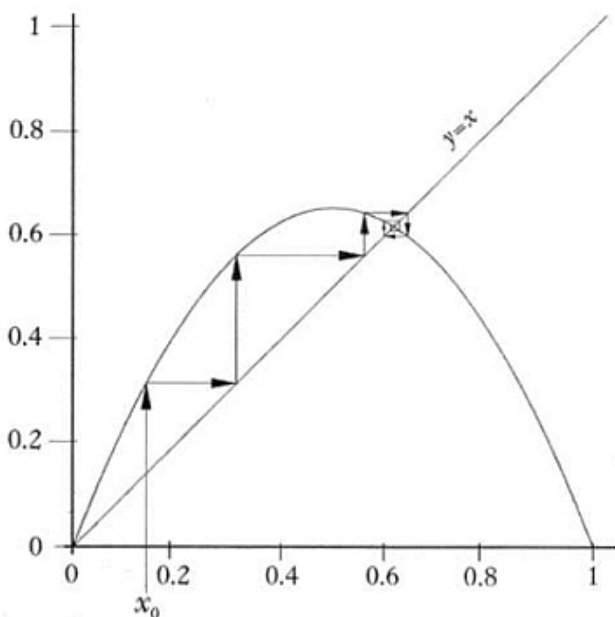


fig.14 Convergenza verso un punto fisso per la mappa logistica con $r=2,6$

Superando di poco il valore 3 (ponendo $r=3,4$) il processo iterativo non si stabilizza in un unico valore, ma oscilla tra due valori; con $r=3,5$ si ha un ciclo finale tra quattro valori: 0,50088421, 0,87499726, 0,38281968, 0,82694071.

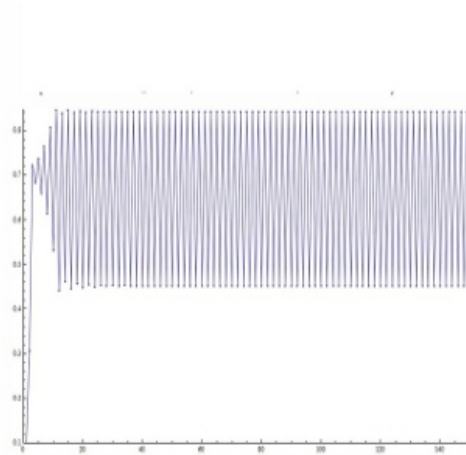
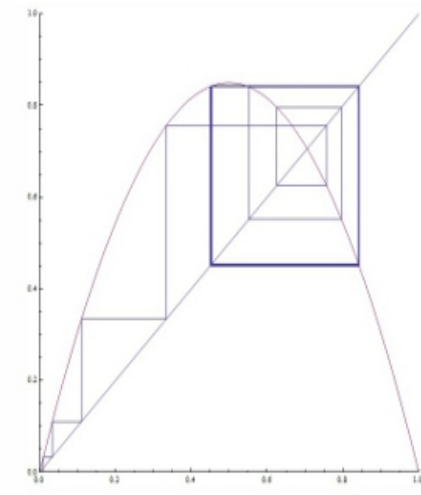


fig.15 Mappa logistica calcolata per $r=3,4$. Le soluzioni del processo iterativo oscillano dopo un transiente iniziale tra due valori nel piano x_{n-1} , x_n e nel grafico cartesiano n (numero di anni), x_n ;

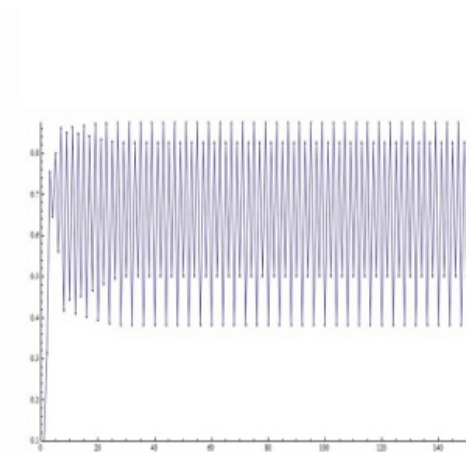
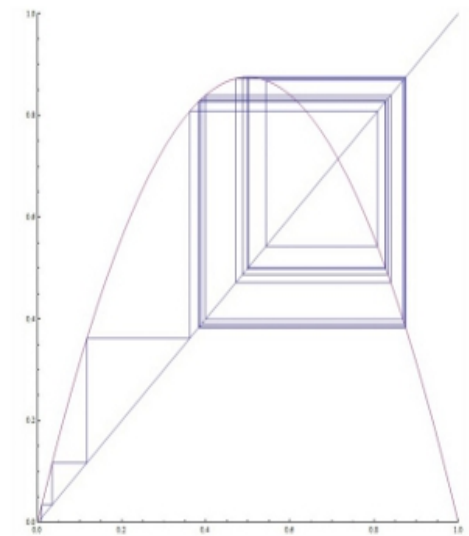


fig.16 Mappa logistica calcolata per $r=3,5$. Le soluzioni del processo iterativo oscillano dopo un transiente iniziale tra quattro valori nel piano x_{n-1} , x_n e nel grafico cartesiano n (numero di anni), x_n ;

L'evoluzione nel tempo (l'iterazione) della popolazione che nel primo caso sarebbe rappresentabile con una soluzione stazionaria, diventa oscillante con raddoppi di periodo. Per $r=3$ c'è il passaggio con una biforcazione delle soluzioni, poi un'altra doppia per valori maggiori e così via.

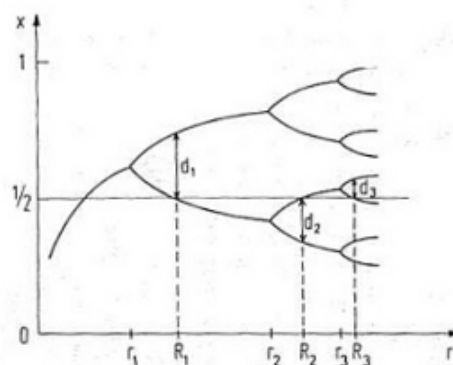
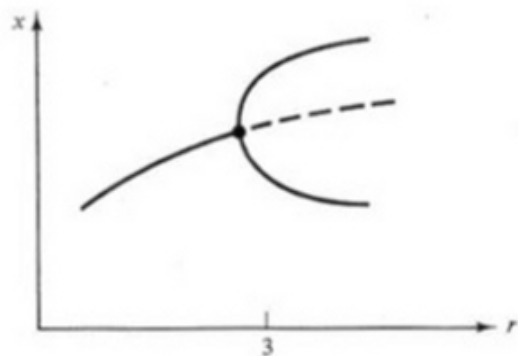


fig. 17 L'inizio del processo di biforcazione per $r=3$; *fig.18* Cascata di biforcazioni

Utilizzando un calcolatore si può trovare un altro valore del parametro $r=3,5699456$ caratteristico della mappa logistica. Per valori inferiori di r si hanno solo soluzioni periodiche crescenti, per valori maggiori, prima di raggiungere il caso $r=4$, il sistema può alternare caratteristiche periodiche e caotiche. Una rappresentazione grafica delle soluzioni delle iterazioni della mappa logistica per r fissato si può ottenere a partire da un valore x_0 ripetendo per un migliaio di volte la stessa operazione e riportando sul grafico gli ultimi, diciamo, cento valori; si ripete quindi il procedimento cambiando di pochissimo r . Il diagramma finale per $r=4$ riempie tutto l'intervallo $[0,1]$, mentre per r più piccolo di 4 i punti non si distribuiscono su tutto lo spazio a disposizione. Osservando un ingrandimento del diagramma, in una finestra compresa tra 3,8 e 3,9, si vede che per particolari valori di r è possibile ancora ottenere soluzioni periodiche, stavolta in numero dispari. La pausa all'irregolarità è un'intermittenza seguita, all'aumentare di r , da biforcazioni e quindi da bande caotiche.

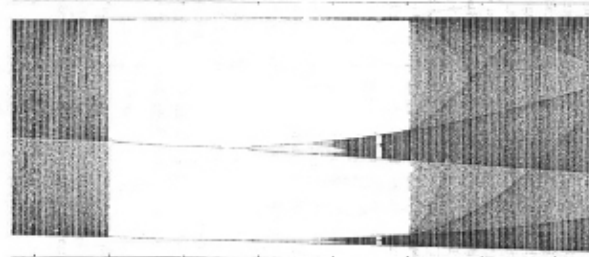
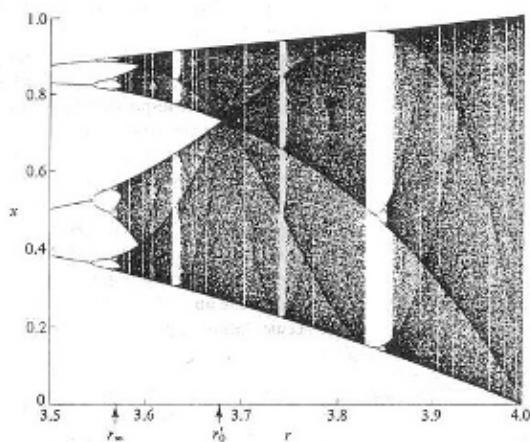


fig.19 Diagramma della mappa logistica; *fig.20* Ingrandimento di una zona della mappa logistica

In prossimità delle zone caotiche il sistema è sensibile alle condizioni iniziali. Ad esempio fissando $r=4$ si possono confrontare due diversi x_0 vicinissimi ($0,2324000$ e $0,2324001$), iterando 100 volte il processo come rappresentato in figura 21.

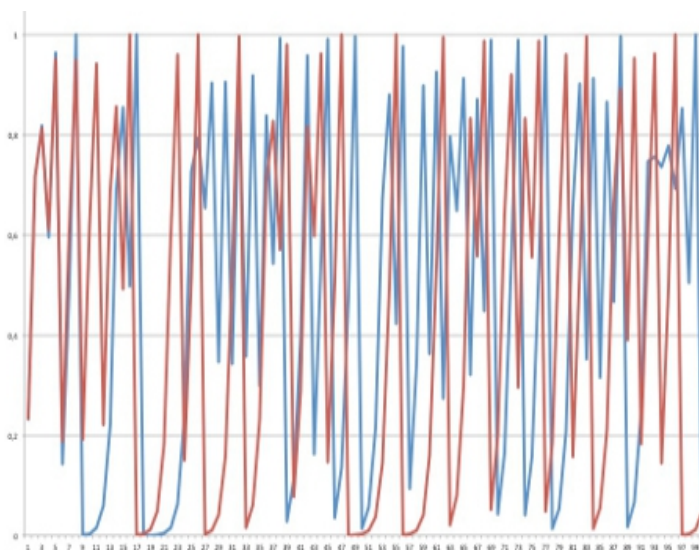


fig.21 Rappresentazione grafica (Excel) di due serie di valori ottenuti dalla mappa logistica per $r=4$ e condizioni iniziali per x_0 che differiscono solo di una quantità pari a $0,0000001$. Se si escludono i primi punti, le serie mostrano un rapido allontanamento. La curva ha ora una dipendenza sensibile dal valore iniziale

Inizialmente i valori si mantengono assai vicini, ma dalla decima iterazione gli x_n delle due serie si allontanano per poi intrecciarsi di tanto in tanto per lo spazio limitato a loro disposizione. Il calcolo dipende inoltre dalle approssimazioni delle cifre decimali

scelte nel foglio di lavoro. La matematica della mappa logistica può essere estesa, così negli anni Settanta Mitchell Jay Feigenbaum dimostrò alcune proprietà di universalità estendibili a una vasta classe di sistemi dipendenti da un parametro. Oggi le mappe alla Poincaré che mostrano la dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali (ossia l'impossibilità per molti sistemi meccanici di predire la loro evoluzione su tempi lunghi) sono affiancate da altre mappe che evidenziano comportamenti asintotici aperiodici. E risuonano attuali le parole del grande fisico matematico sulla casualità del comportamento di molti sistemi meccanici.